Dr. Hanna Peywand Kiani

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum Produktansätze, Fouriermethode

Vertretung von Professor Gasser
12.05.2015

Anwendungsbeispiele:

Elektrisches Potential im ladungsfreien Raum,

Wärmeleitung im stationären (zeitunabhängigen) Fall,

stationäre, inkompressible, wirbelfreie Strömung z.B. in Kanälen,

Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\delta\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \delta\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega}$$

Randbedingungen

Damit es eine eindeutige, stetig von den Daten abhängige Lösung der DGL gibt, braucht man noch Randdaten.

Dirichlet Randbedingungen: Lösung u ist auf dem Rand vorgegeben.

Neumann Randbedingungen: Ableitung $\partial_n u(x,y)$ ist auf dem Rand vorgegeben.

Auch ein gemischtes problem ist möglich.

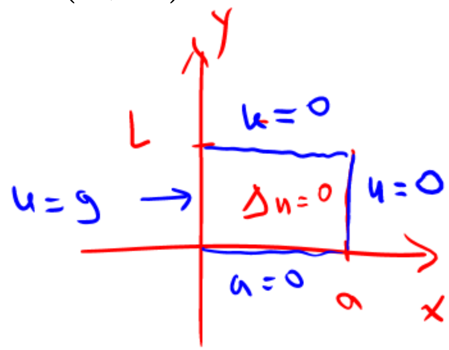
Beispiel : $u =$ Temperatur in einem Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Temperatur wird innen konstant auf u_1 gehalten und auf dem äußeren Rand ist die Änderung der Temp. proportional zur Differenz der konstanten Außentemperatur u_A und der lokalen Temperatur $u(x, y)$:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= u_1 && \text{für } x^2 + y^2 = 1 \\
\partial_n u(x, y) &= k(u(x, y) - u_A) && \text{für } x^2 + y^2 = 4
\end{aligned}
$$

Laplacegleichung auf Rechtecken mit Dirichlet Randbedingungen.

$$\Delta u = 0 \qquad u \in (0,a) \times (0,L)\,, \qquad u = g \text{ auf Rand von} (0,a) \times (0,L)\,.$$



Zunächst: sei g auf drei Seiten des Rechtecks $= 0$. Zum Beispiel:

$$\Delta u = 0 \qquad u \in (0,a) \times (0,L)\,,$$
$$u(0,y) = g(y),\ u(a,y) = 0, \qquad \forall y \in [0,L] \qquad g \not\equiv 0$$
$$u(x,0) = u(x,L) = 0, \qquad \forall x \in [0,a]\,.$$

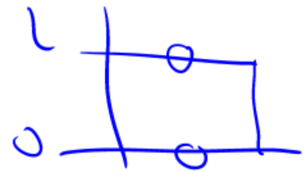
Separationsansatz/Produktansatz: $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0, \qquad \Big| \cdot \frac{1}{v \cdot w}$$

$$\frac{v''}{v} + \frac{w''}{w} = 0$$

Falls $v, w \neq 0$ im inneren des Rechtecks:



$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{v''(x)}{v(x)}}_{\text{nur von x abhängig}} = - \underbrace{\frac{w''(y)}{w(y)}}_{\text{nur von y abhängig}} = \text{konst}$$

$$\Longrightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda \qquad v'' = \lambda v \qquad w'' = -\lambda w$$

Die Randbedingungen liefern für nichttriviale Lösungen

$\forall x$

$$u(x,0) = v(x)w(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{w(0) = 0,} \quad u(x,L) = v(x)w(L) = 0 \Longrightarrow \boxed{w(L) = 0}$$

$v \neq 0$

RWA: $\quad \dfrac{w''(y)}{w(y)} = -\lambda,\ w(0) = w(L) = 0$

Dgl. $w''(y) + \lambda w(y) = 0$ $\qquad \mu^2 + 0 \cdot \mu^1 + \lambda \mu^0 = \mu^2 + \lambda = 0 \qquad \mu = \pm\sqrt{-\lambda}$

liefert für $\lambda = 0 : w(y) = c_1 e^{0y} + c_2 y e^{0y}$ $\qquad c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, y} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, y}$

$= c_1 + c_2 y$

$w(0) = c_1 \overset{!}{=} 0 \qquad w(L) = c_2 \cdot L = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

Für $\lambda \neq 0$: $w(y) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} y} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} y}$

Falls $\lambda < 0$ ist $\alpha := \sqrt{-\lambda}$ reell.

$$w(y) = c_1 e^{\alpha y} + c_2 e^{-\alpha y}$$

$$w(0) = c_1 e^{\overset{1}{\alpha \cdot 0}} + c_2 e^{\overset{1}{-\alpha \cdot 0}} = 0 \implies c_2 = -c_1$$

$$w(y) = c_1 e^{\alpha y} - c_1 e^{-\alpha y}$$

$$w(L) = c_1 \left[e^{\alpha \cdot L} - e^{-\alpha \cdot L} \right] \overset{!}{=} 0$$

$\implies c_1 = 0$ oder $e^{\alpha \cdot L} = e^{-\alpha \cdot L}$ $\implies \alpha L = -\alpha L \implies \underbrace{\alpha = 0}_{\lightning} \vee \underbrace{L = 0}_{\lightning}$

$\alpha = \sqrt{-\lambda} \neq 0$

Falls $\lambda > 0$ ist $\sqrt{-\lambda} =: i\alpha$ imaginär. $\alpha \in \mathbb{R}$

$w(y) = \tilde{c}_1 e^{i\alpha y} + \tilde{c}_2 e^{-i\alpha y}$

$e^{i\alpha y} = \cos(\alpha y) + i\sin(\alpha y)$

Reelle Lösung: $w(y) = c_1 \cos(\alpha y) + c_2 \sin(\alpha y)$

$w(0) = c_1 \overset{1}{\cos(0)} + c_2 \cancel{\overset{0}{\sin(0)}} = \boxed{c_1 = 0.}$

$w(L) = c_2 \sin(\alpha L) = 0$

$c_2 = 0 \Longrightarrow w \equiv 0 \Longrightarrow u \equiv 0$ ↯

$\Longrightarrow c_2 = 0$ oder $\sin(\alpha L) = 0$

$\sin(\alpha L) = 0$

$\alpha = \sqrt{\lambda}$

also $\alpha L = k\pi \Longrightarrow \alpha_k = \frac{k\pi}{L} \Longrightarrow$

$\alpha = k\pi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \; k \in \mathbb{N}_0}$$

$$-\frac{w''}{w} = \frac{v''}{v} = \lambda$$

Zugehörige Lösungen: $\boxed{w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L} y\right)}$

$v_k'' = \lambda_k v_k$

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

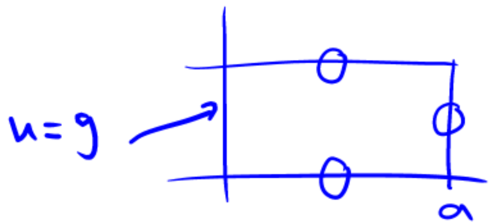
$$v''(x) = \lambda_k v(x) = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 v(x)$$

$$\underbrace{v'' - \lambda_k v}_{} = 0 \longrightarrow \mu^2 - \lambda_k = 0 \iff \underline{\mu = \pm\sqrt{\lambda_k}}$$

$\lambda_k > 0$

$$v_k(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda_k}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_k}x}$$

$$\boxed{v_k(x) = A_k e^{-\frac{k\pi}{L}x} + B_k e^{\frac{k\pi}{L}x}}$$



Alternativ: $v_k = a_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \cosh\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

Hier wird der Ansatz mit den e-Fkt'n weiter bearbeitet

Die dritte Null-Randbedingung liefert:

$$u(a,y) = v(a) \cdot w(y) = 0 \implies v(a) = 0 \implies$$

$$v_k(a) = A_k e^{-\frac{k\pi}{L}a} + B_k e^{\frac{k\pi}{L}a} = 0$$

$$A_k = -e^{2\frac{k\pi}{L}a} B_k$$

und damit $\boxed{v_k(x) = B_k \left[-e^{2\frac{k\pi}{L}a} e^{-\frac{k\pi}{L}x} + e^{\frac{k\pi}{L}x}) \right]}$

Jede Funktion $u_k(x, y) = v_k(x) \cdot w_k(y)$ löst die DGL. und erfüllt die drei Null-Randbedingungen. Das gilt dann aber auch für jede Linearkombination dieser u_k.

$e^{\frac{k\pi}{L}a} \cdot e^{\frac{k\pi}{L}a}$ $\qquad$ $e^{-\frac{k\pi}{L}a} \cdot \underline{e^{\frac{k\pi}{L}a}} \cdot e^{\frac{k\pi}{L}x}$

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n} B_k \left[-e^{2\frac{k\pi}{L}a} e^{-\frac{k\pi}{L}x} + e^{\frac{k\pi}{L}x}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}y)$$

oder damit es übersichtlicher wird, mit $c_k = B_k e^{\frac{k\pi}{L}a}$ und mit $n \to \infty$ (hoffentlich konvergent!)

$$\boxed{u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(x-a)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(x-a)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}y)}$$

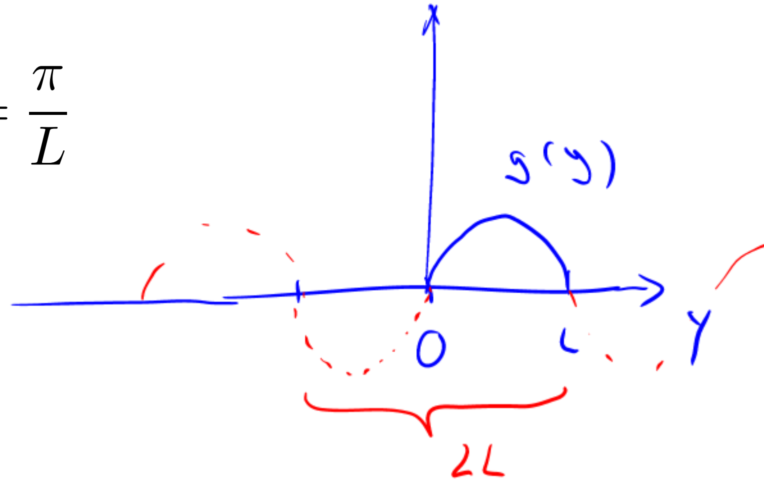
Zu erfüllen ist noch $u(0,y) = g(y)$ also

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(0-a)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(0-a)} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} y\right) \overset{!}{=} g(y) \qquad \overset{y}{\cancel{x}} \in [0, L]$$

Bestimme dazu Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L$-periodischen Fortsetzung von g.

$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\omega y), \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin(k\omega y)\, dy\,.$$



Dann gilt mit

$$c_k = \frac{\beta_k}{e^{-\frac{k\pi}{L}a} - e^{\frac{k\pi}{L}a}}$$

und damit $$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(x-a)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(x-a)} \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} y\right)}$$

oder mit $b_k = 2c_k$

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}(x-a)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}y\right)}$$

Sind die Nullranddaten anders verteilt, so muss der Ansatz angepasst werden.

Beispiele: Anleitung + Übung!

Laplace Gleichung auf Rotationssymmetrischen Gebieten

$v(x,y) = x^2 + y^2$

$u(r,\varphi) = r^2$

$\Delta v = 0 \neq u_{rr} + u_{\varphi\varphi} = 0$

Laplace Operator in Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$:

$$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi) \quad \boxed{\Delta v \;=\; 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} \;=\; 0\,.}$$

BEWEIS: Setze $v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)$. Dann liefert Kettenregel

$v_x(x(r,\varphi), y(r,\varphi))$

$$v_{rr} = (\cos(\varphi))_r \cdot v_x + \cos(\varphi)[v_{xx}\cdot x_r + v_{xy}\cdot y_r] + \sin(\varphi)_r \cdot v_y + \sin(\varphi)[v_{yx}\cdot x_r + v_{yy}\cdot y_r]$$

cos, sin, sin

$$u_r \;=\; v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r \;=\; \cos(\phi) v_x + \sin(\phi) v_y$$

$$u_\phi \;=\; v_x \cdot x_\phi + v_y \cdot y_\phi \;=\; -r\sin(\phi) v_x + r\cos(\phi) v_y$$

$$u_{rr} \;=\; v_{xx}\cos^2(\phi) \;+\; 2v_{xy}\cos(\phi)\sin(\phi) + v_{yy}\sin^2(\phi)$$

$$u_{\phi\phi} \;=\; v_{xx} r^2 \sin^2(\phi) \;+\; 2v_{xy} r^2 \cos(\phi)(-\sin(\phi)) + v_{yy} r^2 \cos^2(\phi) - r\cos(\phi) v_x - r\sin(\phi) v_y$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} &= (r^2 \cancel{\cos^2(\phi)} + r^2 \cancel{\sin^2(\phi)}) v_{xx} \\
&+ (2r^2 \cos(\phi)\sin(\phi) - 2r^2 \cos(\phi)\sin(\phi)) v_{xy} \\
&+ (r^2 \cancel{\sin^2(\phi)} + r^2 \cancel{\cos^2(\phi)}) v_{yy} \\
&+ r\cos(\phi) v_x + r\sin(\phi) v_y - r\cos(\phi) v_x - r\sin(\phi) v_y \\
&= r^2 (v_{xx} + v_{yy})\,.
\end{aligned}
$$

$u = v(\varphi)\, w(r)$

$u(r, \frac{17}{4}\pi)$

$u(r, \frac{9\pi}{4})$

$u(r, \pi/4)$

$u(r, \varphi)$

Ansatz: $\boxed{u(r,\phi) = w(r)\cdot v(\phi)}$ in $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0$

Neue Dgl.: $r^2 w'' \cdot v + r w' \cdot v + w \cdot v'' = 0$

Sortieren nach v und w: $v(r^2 w'' + r w') = -w \cdot v''$ $\quad \Big| \cdot \frac{1}{v \cdot w}$

nur von r abh. $\quad \Longrightarrow \dfrac{r^2 w'' + r w'}{w} = -\dfrac{v''}{v} = \lambda.$ $\quad$ nur von φ abh.

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$
\boxed{v''(\phi) = -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda w = 0}
$$

Zunächst Dgl. für v : $v''(\phi) = -\lambda v(\phi)$

Liefert wieder lineare Funktion, reelle Exponentialfunktion oder Sinus/Cosinus

$\tilde{v}_k = \cos(k\varphi)$

v sollte $2\pi-$periodisch sein, daher kommen nur $\lambda_k = k^2$ und

$(\tilde{v}_k)' = -k\sin(k\varphi)$

$v_k'' = -k^2\cos(k\varphi)$

$$\boxed{v_k(\phi) = a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

in Frage. Gleichung für die passenden w_k lautet

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$$

$k=0$ $\quad r(rw'' + w') = 0 \quad w' = z \quad w'' = z' \quad rz' + z = 0$

$\frac{dz}{dr} = -\frac{z}{r}$

$\underline{k=0:}$ $\quad w'' = -\frac{1}{r}w' \implies w' = \frac{d_0}{r} \implies \boxed{w_0 = c_0 + d_0\ln(r)\,.}$

$z = w'$

$\underline{k \neq 0}$: Eulersche Dgl.: $r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$

Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

$w' = \gamma r^{\gamma-1}, \qquad w'' = \gamma(\gamma-1) r^{\gamma-2}$

Also Dgl:

$$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow r^\gamma(-k^2 + \cancel{\gamma} + \gamma^2 - \cancel{\gamma}) = 0 \Longleftrightarrow \gamma = \pm k$$

und damit $\boxed{w_k(r) = c_k r^{-k} + d_k r^k}$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL. Da die Dgl linear ist, ist Jede Lin.Komb. auch eine Lösung

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_k (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen wählt man:

$c_0 + \sum r^k \left(d_k a_k \cos(k\varphi) + b_k d_k \sin \right.$

$0 \leq r < R$

$a_k d_k = \frac{A_k}{R^k}$

- **Auf einem Innenraum** also für die Aufgabe

  $\Delta u = 0$ in $x^2 + y^2 < R^2, \qquad u(R, \phi) = u_0(\phi)$

  $c_k = 0$ und $d_0 = 0$ und erhält:

$$\boxed{u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))}$$

- Auf einem **Außenraum** also für die Aufgabe

  $\Delta u = 0$ in $x^2 + y^2 > R^2, \qquad u(R, \phi) = u_0(\phi)$

  $d_k = 0$ und:

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

- in einem **Ring** mit $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ mit RW'n $u(R_1, \phi) = u_1(\phi), \quad u(R_2, \phi) = u_2$

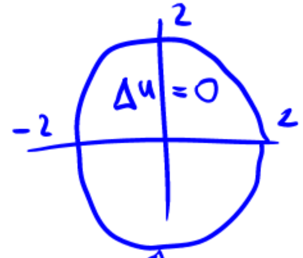
  volle Ansatzfunktion.

- im **(Ring-)Sektor**: Periode anpassen! Siehe Übungen.

Koeffizienten werden mittels Fourierentwicklung der Randbedingungen bestimmen!

Beispiel:

$\Delta u = 0$ für $x^2 + y^2 < 4$, $u(x,y) = 4 - y^2$, auf $x^2 + y^2 = 4$.



Allgemeine Lösungsdarstellung auf dem Innenraum $x^2 + y^2 < R^2$ **:**

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

$u(x,y) = 4 - y^2$

$y = r\sin(\varphi)$

Randwerte: $u(R,\phi) = u_0(\phi)$ (hier $u(2,\phi) = 4 - (2\sin(\phi))^2$)

Lösungsformel liefert:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

$$u(2,\phi) = 4 - \underbrace{4\sin^2(\phi)}_{u_0} \overset{!}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

Dies ist eine Fourierreihe! Bestimme Fourierkoeffizienten von u_0.

$$u_0(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\cos(k\phi)\,d\phi, \qquad B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\phi)\sin(k\phi)\,d\phi$$

Hier: $\cos(2\varphi) = 1 - 2\sin^2\varphi$

$2\sin^2\varphi = 1 - \cos(2\varphi)$

$4\sin^2\varphi = 2 - 2\cos(2\varphi)$

$$u_0(\phi) = 4 - 4\sin^2(\phi) = 2 + 2\cos(2\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi)$$

$k = 2$ $\quad A_2 = 2$

Damit $A_0 = 4,\ A_2 = 2,\ A_k = 0$ sonst und $B_k = 0$

$$u(r,\phi) = 2 \;+\; 2\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos(2\phi)\,.$$

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k \Big[\overbrace{A_k}^{A_2 = 2}\cos(k\varphi) + \underbrace{B_k}_{=0}\sin(k\varphi)\Big]$$

$$= 2 + \frac{r^2}{R^2}\cdot 2\cdot\cos(2\varphi)$$

$R = 2$

Herleitung über Fourier Reihen

Satz: Sei u_0 eine 2π-periodische, stückweise C^1 Funktion. Dann hat die RWA

$\Delta u = 0$ in $x^2 + y^2 < R^2, \qquad u(R,\phi) = u_0(\phi)$

eine eindeutig bestimmte Lösung. u hat in Polarkoordinaten die Darstellung

$$u(r,\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (\alpha_k \cos(k\phi) + \beta_k \sin(k\phi)), \tag{1}$$

wobei die α_k und β_k die Fourier Koeffizienten der Funktion u_0 sind.

Beweis:

Annahme: u ist eine Lösung der Laplacegleichung auf einem Gebiet D mit $K_R(0) \subset D$. In D gilt dann (s. Oben)

$$r^2 \Delta u = r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0. \tag{2}$$

Für festes $r \in]0, R]$ ist $\phi \to u(r,\phi)$ eine glatte, $2\pi-$ periodische Funktion. Die Fourier-Entwicklung dieser Funktion konvergiert absolut und gleichmäßig.

Es gelten

$$u(r,\phi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(r)\cos(k\phi) + b_k(r)\sin(k\phi)), \tag{3}$$

$$a_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\alpha)\cos(k\alpha)\,d\alpha, \qquad b_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\alpha)\sin(k\alpha)\,d\alpha$$

Ableitungen von u aus (3): glm. Konvergenz erlaubt Ableiten unter der Summe!

$$u_r(r,\phi) = \frac{a_0'(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'(r)\cos(k\phi) + b_k'(r)\sin(k\phi)),$$

$$u_\phi(r,\phi) = 0 \cdot \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-k \cdot a_k(r)\sin(k\phi) + k \cdot b_k(r)\cos(k\phi)),$$

$$u_{rr}(r,\phi) = \frac{a_0''(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k''(r)\cos(k\phi) + b_k''(r)\sin(k\phi)),$$

$$u_{\phi\phi}(r,\phi) = 0^2 \cdot \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 \cdot a_k(r)\cos(k\phi) - k^2 \cdot b_k(r)\sin(k\phi)).$$

Einsetzen in DGL (2):

$$\stackrel{1.}{=} \left(r^2 \cdot \frac{a_0''(r)}{2} + r \cdot \frac{a_0'(r)}{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (r^2 \cdot a_k''(r) + r \cdot a_k'(r) - k^2 \cdot a_k(r)) \underline{\cos(k\phi)}$$
$$+ (r^2 \cdot b_k''(r) + r \cdot b_k'(r) - k^2 \cdot b_k(r)) \underline{\sin(k\phi)}) = 0$$

$\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$: ONS $\Longrightarrow$ Alle Koef'n $= 0$:

$$\left.\begin{aligned} r \cdot a_0(r)'' + a_0'(r) &= 0 \\ r^2 \cdot a_k''(r) + r \cdot a_k'(r) - k^2 \cdot a_k(r) &= 0 \\ r^2 \cdot b_k''(r) + r \cdot b_k'(r) - k^2 \cdot b_k(r)) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Die Lösung der gewöhnlichen Dgl'n für a_k, b_k liefert (s.Oben)

$$
\begin{aligned}
a_0(r) &= A_0 + C_0 \ln(r) \\
a_k(r) &= A_k \cdot r^k + C_k \cdot r^{-k}, \; b_k(r) \; = \; B_k \cdot r^k + D_k \cdot r^{-k}
\end{aligned}
$$

Damit die Lösung für $r \to 0$ beschränkt bleibt: $C_k = D_k = 0$.

Also insgesamt

$$
u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^{R^k} (A_k \cdot \underset{R^k}{\underline{r^k}} \cdot \cos(k\phi) \; + \; B_k \cdot r^k \cdot \sin(k\phi)) \tag{4}
$$

Randbedingungen:

$$u(R,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot R^k \cdot \cos(k\phi) \,+\, B_k \cdot R^k \cdot \sin(k\phi)) \overset{!}{=} u_0(\phi)$$

D.h. $A_k \cdot R^k$ bzw. $B_k \cdot R^k$ sind die Fourierkoeffizinten von u_0.

$$u(R,\phi) = u_0(\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_k \cos(k\phi) \,+\, \beta_k \sin(k\phi)),$$

Damit also $A_0 = \alpha_0$ und $A_k = \frac{\alpha_k}{R^k}$, $B_k = \frac{\beta_k}{R^k}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Einsetzen in (4) ergibt die behauptete Darstellung (1) der Lösung von (2).

Produktansatz geht nicht immer!

$\sin(x)$

Beispiel: $u_t + xu_x = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$.

Ansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ eingesetzt in DGl:

$u_t = v \cdot \dot{w}$ $\quad u_x = v' \cdot w$

$v\dot{w} + xv'w = 0$

X $\quad v(x) \cdot \dot{w}(t) = -x \cdot v'(x) \cdot w(t) \implies$

t-abh. $\quad -\frac{\dot{w}}{w} = +\frac{xv'}{v} = \lambda$ $\quad$ x-abh.

$\dot{w} = -\lambda w$

$\frac{dw}{dt} = -\lambda w$ $\quad \frac{dw}{w} = -\lambda\, dt$

$\ln|w| = -\lambda t + \tilde{c}$ $\quad w = \hat{c}e^{-\lambda t}$

$u(x,t) = c\left(xe^{-t}\right)^{\lambda}$

$u(x,0) = c\,x^{\lambda}$

$\frac{x}{v} \cdot \frac{dv}{dx} = \lambda \implies \frac{dv}{v} = \lambda \frac{dx}{x}$

$\ln|v| = \lambda \ln|x| + \tilde{d}$ $\quad v = x^{\lambda} \cdot d$

Charakteristiken Methode liefert:

$u = f(xe^{-t}), \implies u(x,0) = f(x)$ Kein Problem!

$\phantom{u = f(xe^{-t}), \implies u(x,0) =}\ \| \\ u_0(x) = \sin(x)$

$u(x,t) = w \cdot v = c\,x^{\lambda}e^{-\lambda t}$

$= c \cdot \left(xe^{-t}\right)^{\lambda}$

$u(x,t) = \sin\left(xe^{-t}\right)$

$u(x,0) = u_0(x) \overset{!}{=} c \cdot \left(xe^0\right)^{\lambda}$

$= cx^{\lambda} = \sin(x)$!