3.1 Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung (in Matrixschreibweise)

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Lineare Algebra: Hauptachsentransformation

Jede reelle, symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ ist **diagonalisierbar**. Weiter gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

wobei $\mathbf{S}$ als eine **orthogonale** Matrix gewählt werden kann.

Bemerkung: Eine reelle Matrix $\mathbf{S}$ ist **orthogonal**, falls gilt:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$$

A konstant $\qquad \nabla^T = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) \qquad (\nabla^T A \nabla)u = \operatorname{div}(A\nabla u)$

Falls $a_{ij} = a_{ij}(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\, u_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}\right)_{x_i} u_{x_j}$$

$$\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) - \underset{\displaystyle \sum_i \left(a_{ij}(x)\right)_{x_i}}{\underset{\parallel}{b(x)}} \cdot \nabla u$$

Ansatz zur Herleitung von Normalformen:

Verwende die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathbf{S}^T\,\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = (S^T)_{ji} = (S)_{ij}$$

und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T\,\mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial y_j}{\partial x_i}}_{(S)_{ij}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

$$\nabla_x u = S \nabla_y \tilde{u}$$

Wegen $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

S konstant

$$\nabla_x = S \nabla_y \qquad \nabla_x^T = (S\nabla_y)^T = \nabla_y^T S$$

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_x \, u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \, \nabla_y \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise

$$\nabla_x = \mathbf{S} \, \nabla_y$$

Transponieren wir diese Beziehung, so folgt

$$\nabla_x^T = (\mathbf{S} \, \nabla_y)^T = \nabla_y^T \, S^T$$

Ergebnis:

Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \underbrace{\mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}}_{D} \, \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^t \mathbf{S} \, \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u} + (\mathbf{b}^t \, \nabla) u + f u = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDE gegeben durch

$$\boxed{(\nabla^T \mathbf{D} \, \nabla) \tilde{u}} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}, \qquad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$ und

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{S}\,\mathbf{y}) \qquad \tilde{g}(\mathbf{y}) := g(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$$

$$(\nabla^T A \nabla) u = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{pmatrix} u$$

Beispiel:

$$\det(A - \lambda I_2) = \boxed{(e_{11} - \lambda)(e_{22} - \lambda) - e_{12}^2 = 0}$$

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$n = 2$

$$\boxed{a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +}$$

$$b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2) u = g(x_1, x_2)$$

Mit $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}}$ lautet die Diagonalform

$$\boxed{\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2}} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

keine gemischten Ableitungen

Beachte:

Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, allerdings sind die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** gerade die **Eigenwerte** der Ausgangsmatrix $\mathbf{A}$.

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \, \nabla) u + f u = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

1) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch.**

2) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n-1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch.**

3) Ist mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich Null, so nennt man die Gleichung **parabolisch.**

nicht alle Möglichkeiten !!

Beispiel:

Wir betrachten wiederum den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +$$

$$b_1(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u \;=\; g(x_1, x_2)$$

Dann ist die **Diagonalform** gegeben durch:

$$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

Die partielle Differentialgleichung heißt

Speziell für $n=2$

1) **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist.

Vorsicht $n > 2$

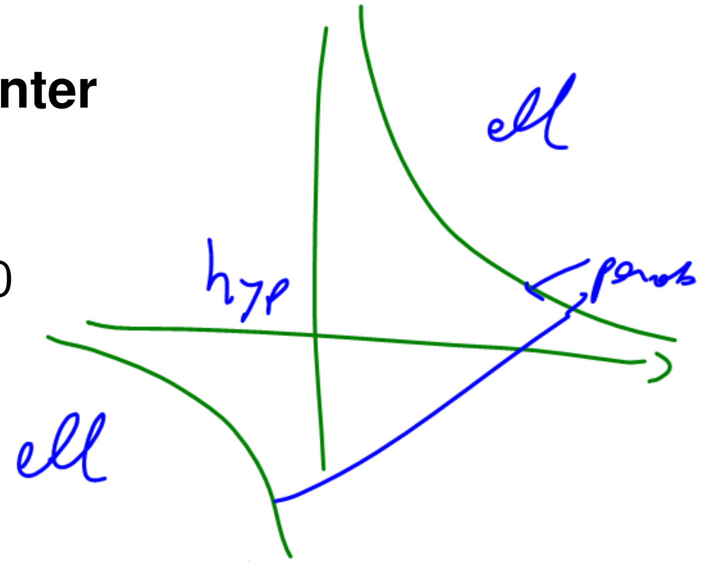
2) **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist.

3) **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

Bemerkung:

Die Typeneinteilung läßt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ erweitern: die Gleichung

$$\boxed{yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy}} = 0$$



hat die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Die Diskriminante D lautet daher $(y-\lambda)(x-\lambda)-1 = \lambda^2 - \lambda(x+y) \underbrace{-(1-xy)}_{-\lambda_1 \cdot \lambda_2} = 0$

$$D = 1 - xy$$

Die Gleichung ist also **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$, **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

Beispiel:

Die Tricomi–Gleichung

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = g(x, y)$$

ist **elliptisch** für $k(y) < 0$, **hyperbolisch** für $k(y) > 0$ und **parabolisch** für $k(y) = 0$.

Zentrale Frage:

Wieso macht man eine solche Typeneinteilung?

Zentrale Antwort:

Jede Typenklasse hat charakteristisches Lösungsverhalten!

nach Diagonalisierung

$$\boxed{\pm\, a_{11} u_{xx} \pm a_{22} u_{yy}} = (*)$$

$a_{11} > 0$

$a_{22} > 0$

$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{a_{11}}}$, $\tilde{y} = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}$

$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\sqrt{a_{11}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = a_{11}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}$

$$u(x,y) = \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{u}\left(\frac{x}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}\right)$$

$$(*) = \boxed{\pm\, \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} \pm \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}}$$

Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Definition:

1) Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

2) Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

$1 \qquad -1$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

3) Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$0 \cdot u_{tt} + \underset{+1}{\Delta u} + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g$$

wobei Δ wiederum den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$ bezeichnet.

Klassische Beispiele:

1) **Elliptische** Laplacegleichung

$$\Delta u = 0,$$

2) **Hyperbolische** Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

3) **Parabolische** Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u,$$

3.2 Korrekt gestellte Probleme

Definition:

Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs– und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) **Existenz:**
   Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.

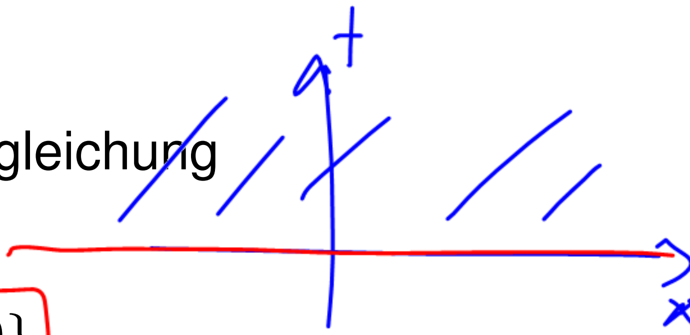
2) **Eindeutigkeit:**
   Die Lösung ist eindeutig.

3) **Stabilität:**
   Die Lösung hängt stetig von den Anfangs– bzw. Randbedingungen ab, d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Eindimensionale Wellengleichung

Beispiel:

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung



Anfangsbed.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ \boxed{u = u_0}, \boxed{u_t = v_0} & \text{auf } \boxed{\mathbb{R} \times \{t = 0\}} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem.

Physikalische Motivation:

Die Wellengleichung beschreibt das dynamische Verhalten einer eingespannten Saite, die zur Zeit $t = 0$

1) um die Funktion $u_0(x)$ ausgelenkt ist und

2) sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt.

$v_0 = 0$: $u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct))$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{1}{2}(u_0''(x-ct)c^2 + u_0''(x+ct)c^2 - c^2 u_0''(x-ct) - c^2 u_0''(x+ct)) = 0$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist (**Formel von d'Alembert**):

eindeutig wäre zu klein

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\, d\xi$$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten:

Sei $\tilde{u}(x,t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x-ct) - u_0(x-ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x+ct) - u_0(x+ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi))\, d\xi\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$\|f\|_\infty = \sup_x \max_x |f(x)|$

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \le \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + t\|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty$$

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel: (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\Delta u = \begin{cases} \boxed{u_{xx} + u_{yy}} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

Randbedingung

ist ein **nicht korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$\boxed{u_0 = 0 \quad v_0 = 0} \to \boxed{u(x,y) = 0}$!

$$u(x, y) = 0$$

$0 \xleftarrow{n\to\infty}$ $\qquad$ 0 $\qquad$ ∞ (außer $nx = k\pi$) $\xleftarrow{n\to\infty}$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$\boxed{u_o^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \boxed{u(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sinh(ny)}$$

$u(x,0) = 0$

$u_y(x,0) = \sin x$

z.B. $\boxed{u_0^1(x) = 0 \quad v_0^1(x) = \sin x} \to \boxed{u(x,y) = \sin x \cdot \sinh y}$

$u_y(x,y) = \sin x \cosh y$

so ist die eindeutig bestimme Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x,y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

Nun gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0 \qquad \lim_{n\to\infty} v_0^n = v_0$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty \qquad (y > 0)$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x,y) \neq u(x,y)$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.

Randwertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel:

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die

Poissonsche Integralformel

gegeben:

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int\limits_{\|\mathbf{z}\|=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2}\, d\sigma$$

Lösung:

Eine Methode **Produktansatz** (falls Problem eindeutig lösbar, falls Produktansatz eine Lsg. liefert $\Longrightarrow$ das ist die Lsg)

Bspl $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Produktansatz $\boxed{u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)}$,

$u_{xx} + u_{yy} = X''Y + X\cdot Y'' = 0 \qquad \cdot \frac{1}{XY}$

Konst.

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} X'' &= -aX \\ Y'' &= aY \end{aligned}}$$

$X(x) = c_0 \sin\sqrt{a}x + c_1 \cos\sqrt{a}x$

$Y(y) = c_2 \sinh\sqrt{a}y + c_3 \cosh\sqrt{a}y$

$u(x,y) = (c_0 \sin\sqrt{a}x + c_1 \cos\sqrt{a}x)(c_2 \sinh\sqrt{a}y + c_3 \cosh\sqrt{a}y)$

falls $u(x,0) = 0 \Rightarrow c_3\ 0$

$u_y(x,0) = \sin x \Rightarrow \sqrt{a} = 1,\ c_0\cdot c_2 = 1$, $c_1 = 0$

$\Big\}\ u(x,y) = \sin x \cdot \sinh y$