Whg:

$$u_t + f(u)_x = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

Spezialfall

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

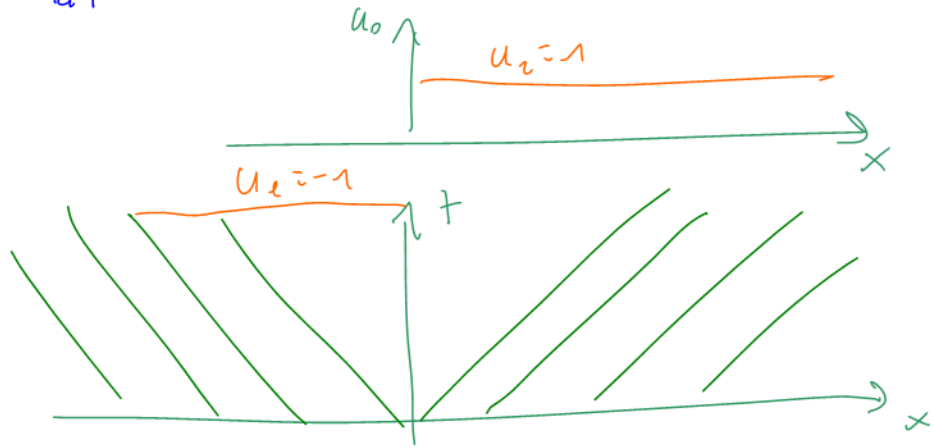
$$u_t + f'(u)\,u_x = 0$$

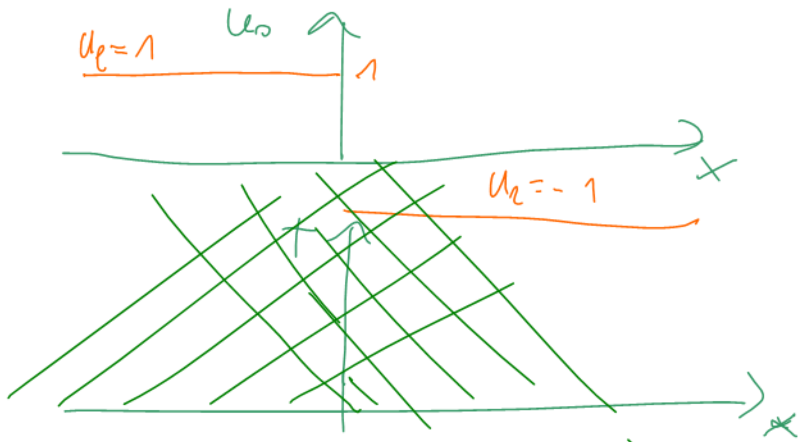
$$u_t + u u_x = 0$$

Charakt.

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(x(t),t)) = f'(u_0(x_0))$$

$$\frac{dx}{dt} = u_0(x_0) \qquad f(u) = \frac{u^2}{2}$$





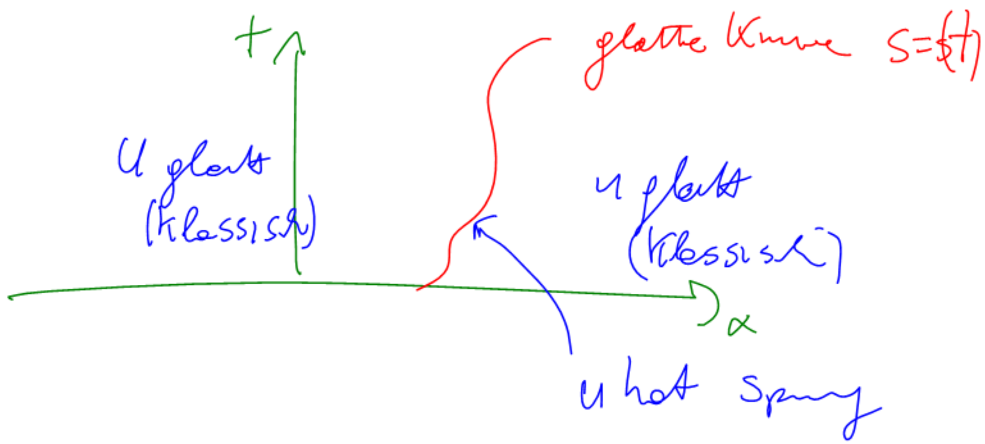
Charakteristiken methode nur beschränkt anwendbar (bei quasi linear)

$\Rightarrow$ anderen Lösungsbegriff

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u v_t + f(u) v_x \right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, v(x,0)\, dx = 0$$

$V: \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$
glatt, kompakten Träger

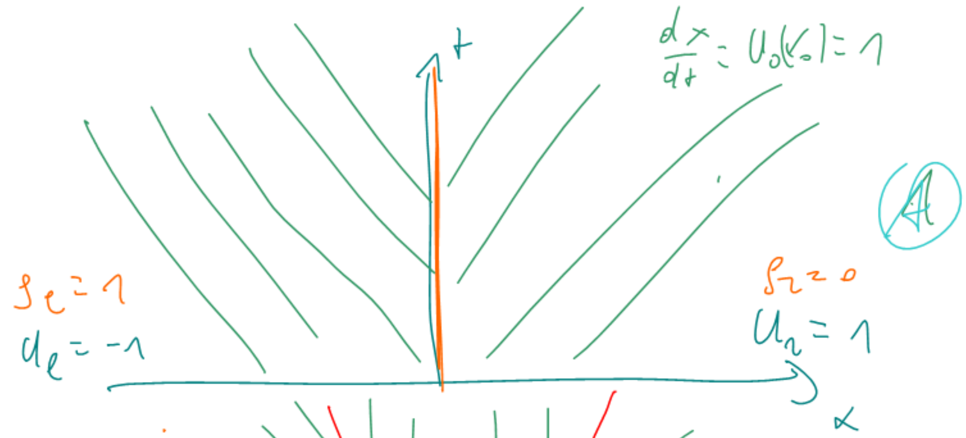
Wir beschränken uns auf

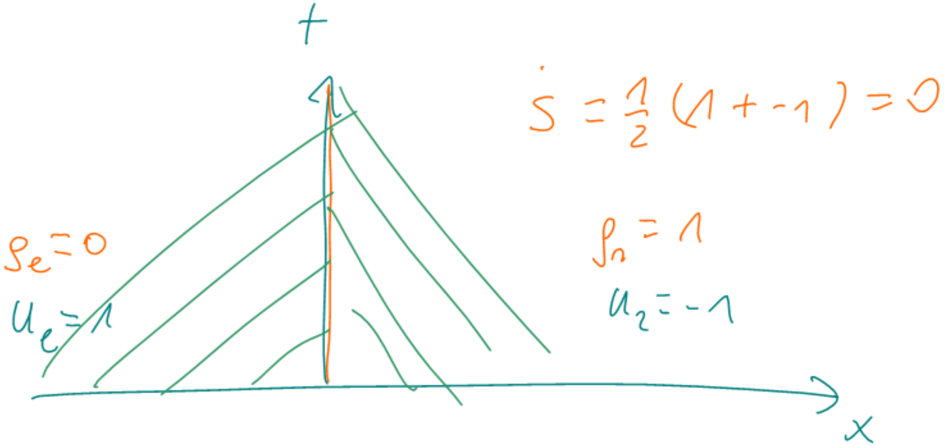


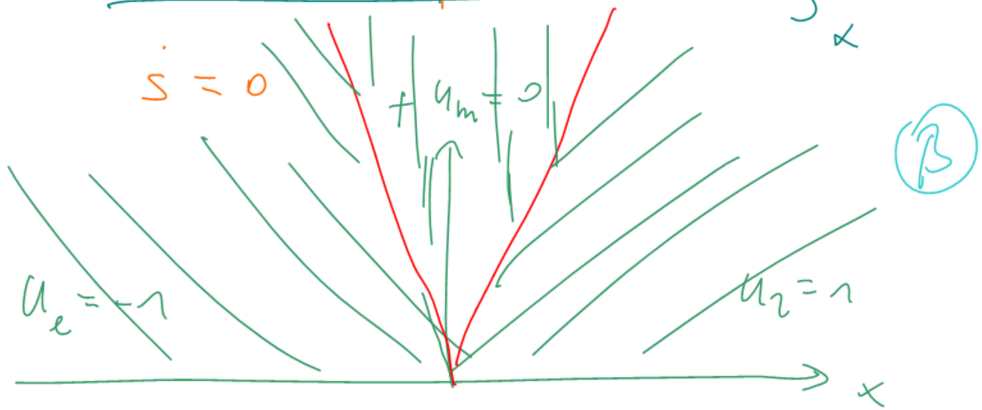
⇒ Bedingung (Rankine Hugoniot)

$$\dot s(t) = \frac{f(u_l)-f(u_r)}{u_l-u_r}$$

$$\dot s(t) = \frac{\frac{u_l^2}{2}-\frac{u_r^2}{2}}{u_l-u_r} = \frac{1}{2}(u_l+u_r)$$



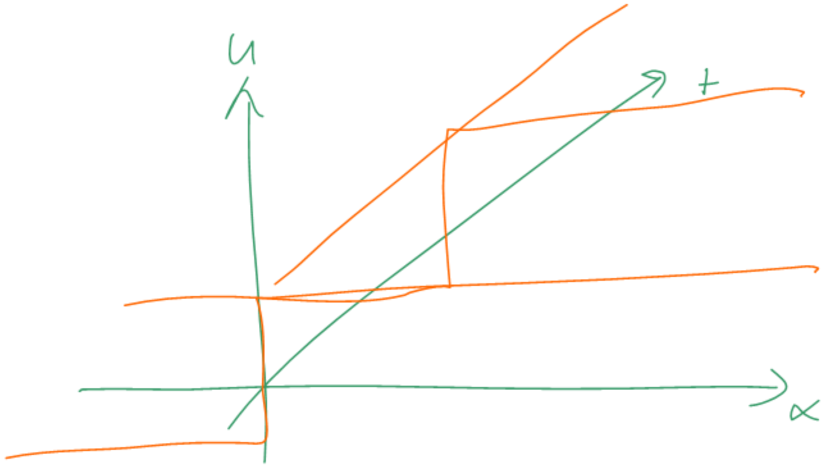




$$\dot s_l = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$$

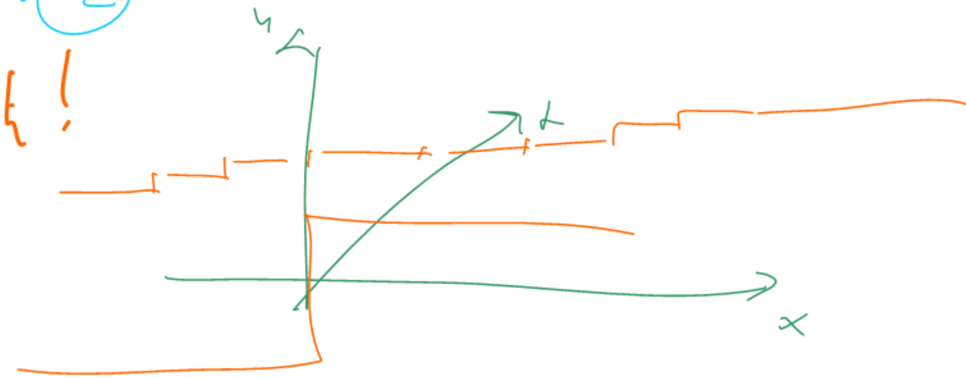
$$\dot s_r = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

1

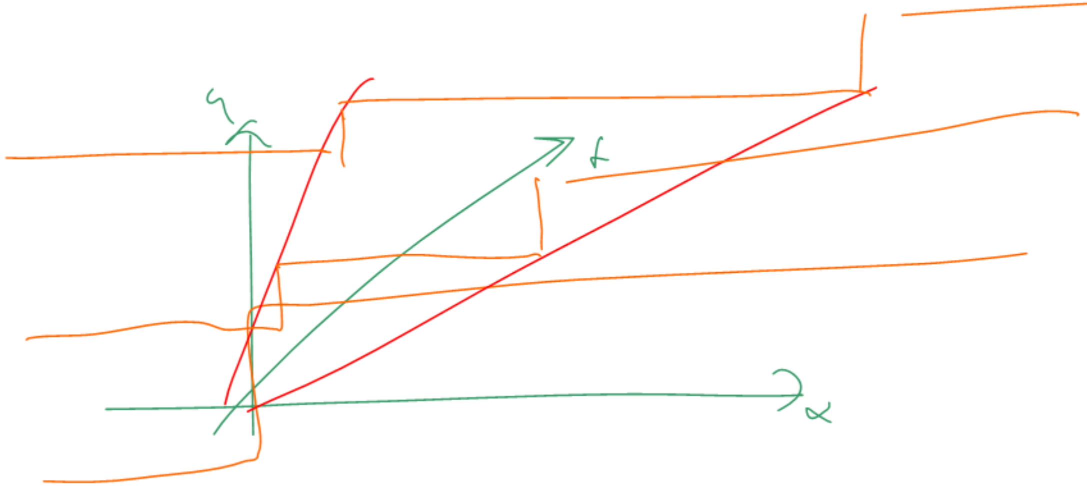


nicht entsprechend!

2



B



Keine Eindeutigkeit gegeben ?

Andere Art von Lsg. Ansatz

$$u(x,t) = \hat{u}\left(\frac{x}{t}\right) = \hat{u}(\xi), \quad \frac{x}{t} = \xi, \quad u_t = \hat{u}' \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) = \hat{u}' \cdot \xi \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$u_x = \hat{u}' \cdot \left(\frac{1}{t}\right)$$

$$0 = u_t + f'(u)\,u_x = \frac{\hat{u}'}{t} \cdot \left(-\xi + f'(\hat{u})\right)$$

$\rightarrow$ [$\hat{u}' = 0$ trivial]

$\rightarrow$ $\boxed{\xi = f'(\hat{u}(\xi))}$

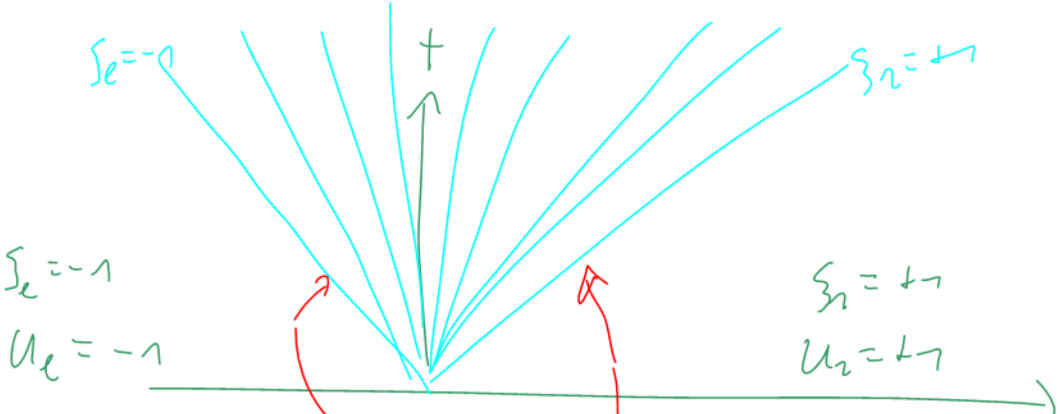
$$(f')^{-1}(\xi) = \hat{u}(\xi)$$

$\boxed{f'(u) = u \qquad \hat{u}(\xi) = \xi \qquad \text{Burgers}}$

$u_l < u_r$

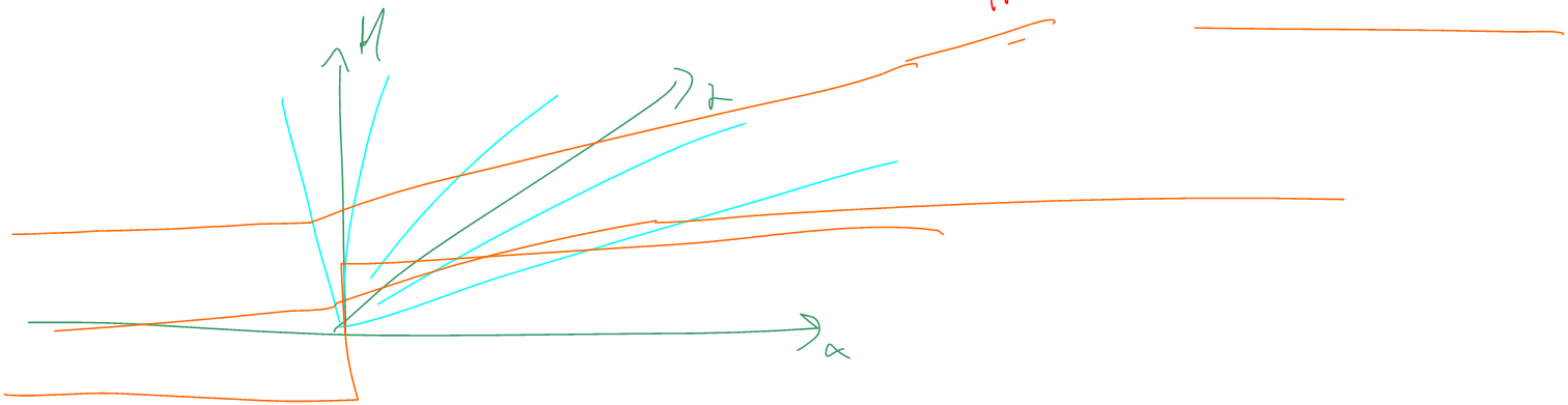
$\downarrow \qquad \downarrow$

$\xi_l \qquad \xi_r$



ist Interpolation (!)

nicht diffbar aber stetig



Selektion einer eindeutigen Lösung bei mehrdeutiger Integrallösung.

Entropie bed.

1. Lax

$$\boxed{f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)}$$

Steigung der charakt.

links rechts

Verkehr: $u_l > \dot{s}(t) > u_r$

$\rho_l < \dot{s}(t) < \rho_r$

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0 \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion sei **strikt konvex.**

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}$$

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r)$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)\,t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω, der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ : \ f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Satz:
Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & : \; x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : \; f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : \; x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis:

Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)\,t$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)\,t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)\,t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)\,t$ und $x > f'(u_r)\,t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2} g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2} g'(x/t) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Problem: Integrallösungen sind nicht **eindeutig**!!

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0 \\ 1 & : \quad x > 0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq t/2 \\ 1 & : \quad x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ x/t & : \quad 0 \leq x \leq t \\ 1 & : \quad x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition:

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$$\exists\, C > 0, \text{ sodass für alle } x, z \in \mathbb{R},\ t > 0 \text{ mit } z > 0 \text{ gilt}$$

$$u(t, x+z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z$$

Satz:

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

Kapitel 3: Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition: Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Spezialfall:

Gilt $a_{ij} =$ const., $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t\, \nabla)u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.