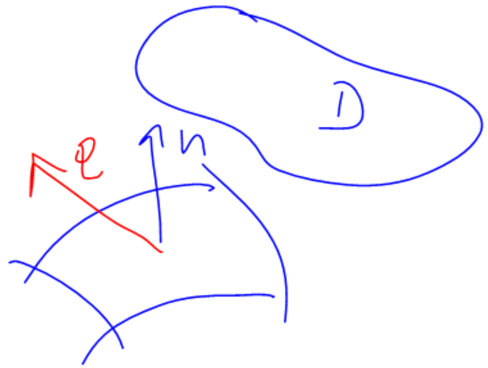
Herleitung:

1.) Reynoldsche Transportsatz — Gebiet D zeitabhängig

2.) über Gauss — Gebiet D fest



$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \frac{d}{dt}\int_D u\,dx = -\int_{\partial D} q\cdot n\,ds + \int_D \underbrace{f}_{\text{Quelldichte}}\,dx$$

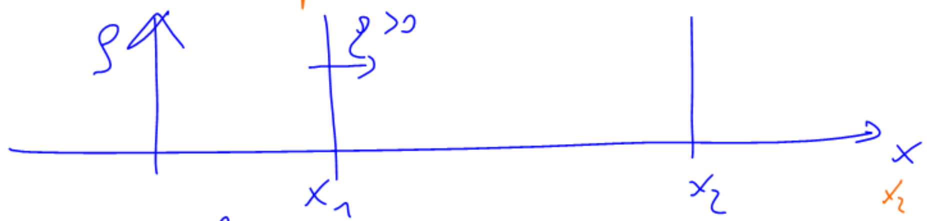
$$\overset{\text{Gauss}}{=} -\int_D \operatorname{div} q\,dx + \int_D f\,dx$$

$$\underset{\text{Anwendung}}{=} -\int_D a \operatorname{div}\nabla u\,dx$$

z.B. $q = -a\nabla u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} q + f$$

3.)



Verkehrsdichte

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\rho\,dx = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho\,dx = q(x_1,t) - q(x_2,t) + \int_{x_1}^{x_2} f = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} q(x,t)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\,dx$$

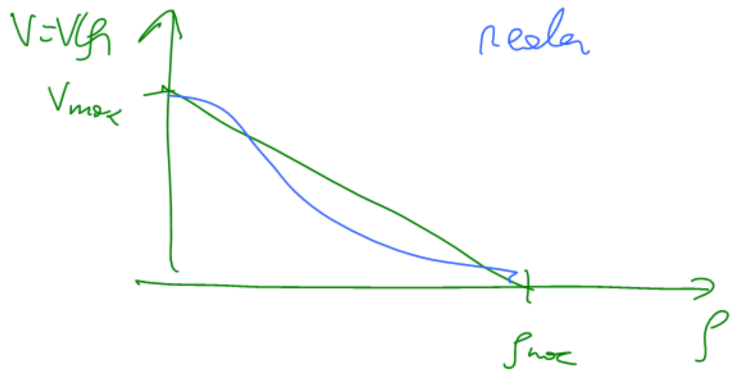
$q = \rho v$

$$\partial_t \rho + \partial_x q = f$$

Verkehr ρ $\frac{\text{Fahrzeuge}}{m}$, $q = \frac{\text{Fahrzeuge}}{s}$

Modell für v (Geschwindigkeit $\frac{m}{s}$)

$$v = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$



$\approx \frac{1}{5m} = 0{,}2\, m^{-1}$

$$\rho_t + \left(\rho\, v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)\right)_x = 0$$

$$\rho_t + v_{max}\,\rho_x - \frac{v_{max}}{\rho_{max}} 2\rho\,\rho_x = 0$$

ρ wesentlich

$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u + f$ $\qquad$ $u = u(x,t)$

Beispiel:

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

so erhält man die **Laplacegleichung**

$$\Delta u(x) = 0$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man **harmonische Funktionen**.

Die Gleichung

$$\Delta u(x) = f$$

mit gegebener Funktion f, nennt man **Poissongleichung**.

Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential.

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten. $a = a(x)$

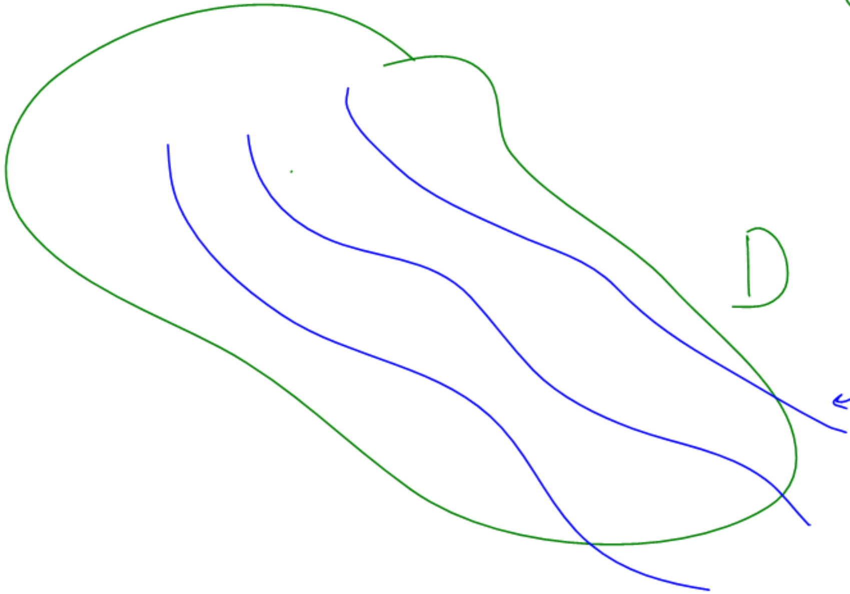
Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \qquad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$x \in D$



spezielle Kurven (Charakteristiken)

Lösung ist entlang der Kurve konstant

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{d\cancel{t}\,\tau}u(\mathbf{x}(\cancel{t}\,\tau)) = \sum_{i=1}^{n} \overset{\frac{dx_i}{d\tau}}{\overset{\|}{a_i}}(\mathbf{x}(\cancel{t}\,\tau))u_{x_i}(x(\cancel{t}\,\tau)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{d\tau} u_{x_i}(x(\tau)) = 0$$

Daraus folgt aber sofort:

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(\cancel{t}\,\tau)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(\cancel{t}\,\tau)) = \text{const.}$$

Definition:
Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein **erstes Integral** des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Die Methode der Charakteristiken ist also nichts anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDE auf gewöhnliche DGL's.

$$\underbrace{x}_{a_1} u_x + \underbrace{x^2}_{a_2} u_y = 0$$

linear, homogen $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{d\tau} = a_1 = x$$

$$\frac{dy}{d\tau} = a_2 = x^2$$

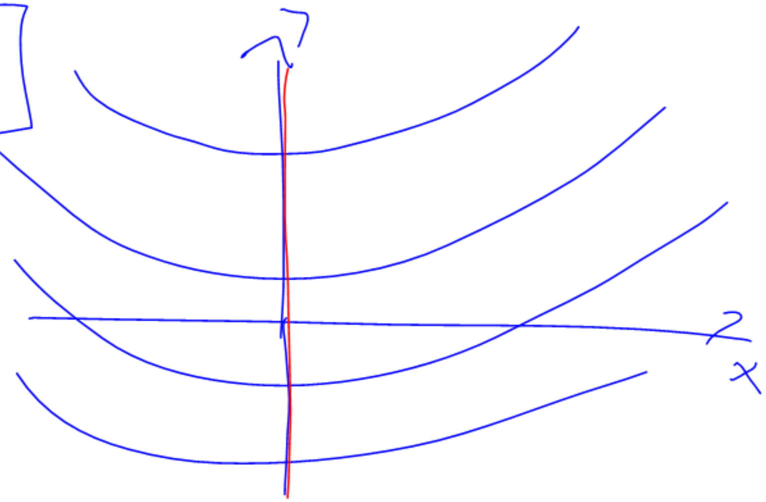
$y_\tau = x^2 = c_0^2 e^{2\tau}$

$\boxed{x(\tau) = c_0 e^{\tau}}$

mit τ parametrisiert

$$\boxed{y(\tau) = c_0^2 \frac{e^{2\tau}}{2} + c_1}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + c_1}$$



Lösung $u = u(c_1) = u\left(y - \frac{x^2}{2}\right)$

Probe $x u_x + x^2 u_y = x u'(-x) + x^2 u' \cdot 1 = 0$

Vorgabe: z.B. bei $x = 0$ $u = u_0(y) = y^2$

zusätzliche Bedingung!!!

Lsg. anpassen $u\Big|_{x=0} = u\left(y - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0} = u(y) \stackrel{!}{=} y^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{u = u(x,y) = \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2}$

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$\underbrace{x}_{a_1} u_x + \underbrace{y}_{a_2} u_y + \underbrace{(x^2 + y^2)}_{a_3} u_z = 0 \qquad \text{linear homogen!}$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 = c_1^2 e^{2\tau} + c_2^2 e^{2\tau} \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3 \end{aligned}$$

Man nennt diese Lösungen auch die charakteristischen Kurven.

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die charakteristischen Kurven erfüllen aber die Beziehungen:

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R} \qquad y = cx$$

und

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + d$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven.

Daraus folgt die Lösungdarstellung

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) = \phi(c, d)$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$x u_x + y u_y + (x^2 + y^2) u_z = x\left(\phi_c\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \phi_d(-x)\right) + y\left(\phi_c \frac{1}{x} + \phi_d(-y)\right) + (x^2 + y^2)(\phi_d \cdot 1) = 0$$

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u)u_{x_i} = b(\mathbf{x},u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

quasilin

übertragen.

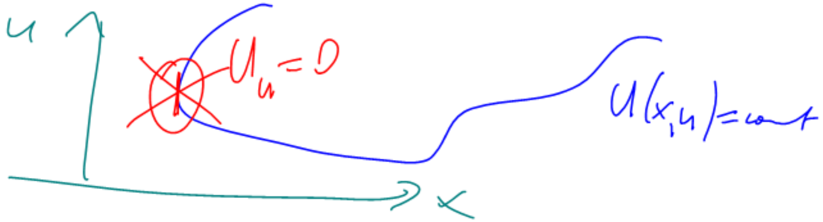
Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

linear homogen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u)U_{x_i} + b(\mathbf{x},u)U_u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $\boxed{U = U(\mathbf{x},u)}$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u.

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x},u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x},u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.



Beweis:

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x,u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x},u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0$$

Ferner haben wir

PDgl ($D_{1,i}$ n+1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u) U_{x_i} + b(\mathbf{x},u) U_u = 0$$

$\to -U_u u_{x_i}$

und daraus folgt

$U_u \left(-\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + b \right) =$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u) u_{x_i} \right) U_u + b(\mathbf{x},u) U_u = 0$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x},u) u_{x_i} = b(\mathbf{x},u)$$

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

quasilinear

$x \quad n=2$

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x$$

(linear inhomogen)

Das erweiterte Problem lautet dann

$(x,u) \quad n=3$

$$\underbrace{(1+x)}_{a_1}U_x - \underbrace{(1+y)}_{a_2}U_y + \underbrace{(y-x)}_{a_3}U_u = 0$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 1+x \\
\dot{y} &= -(1+y) \\
\dot{u} &= y-x \; =
\end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^t - 1 \\
y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\
u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t
\end{aligned}$$

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^{t} = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c} \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u + x + y = d} \in \mathbb{R}$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

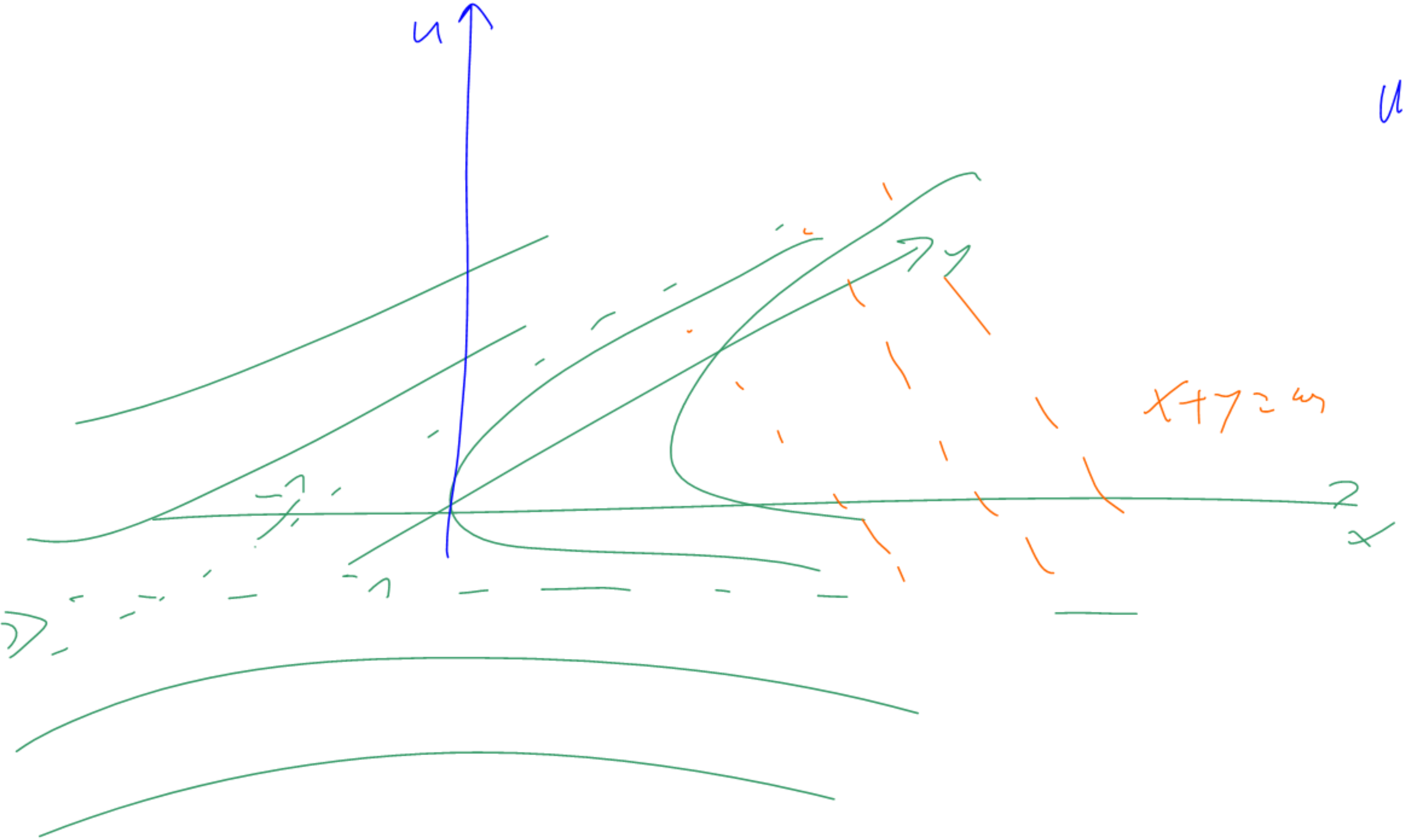
Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungdarstellung

$$\Phi(\underbrace{(x+1)(y+1)}_{c}, \underbrace{u+x+y}_{d}) = 0$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

$u = -x - y + d$

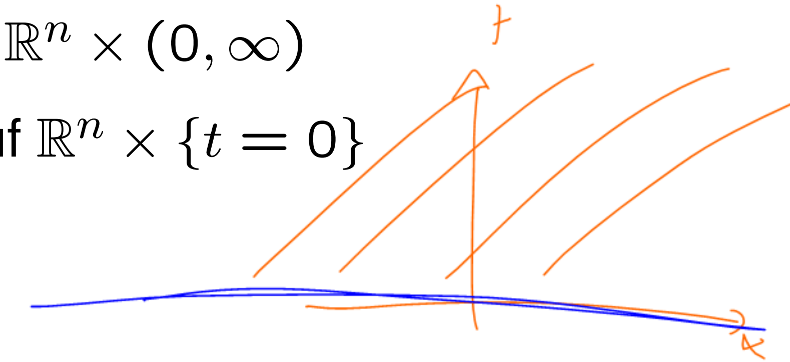


2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$



bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.