Vorlesung Dgl II SS 2015 TUHH

Gassen

Vorlesung + Anleitung + Übung !!

Klausur: 80 % Rechenbeispiele (in Anlehnung an die Übung/Anleitung)

20 % Verständnis

Literatur

*) Das gelbe Rechenbuch III (Furlan)

*) Partial Differential Equations, Evans

*) Ansorge Oberle

*) Schaum Outline PDE

*) Burg, Graf, .. Meister, Band 4

Themen:

1. erste Ordnung (nicht linear)
2. Laplace (Poisson)
3. Wärmeleitung (Diffusion)
4. Wellengleichung

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Department Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2010

nach Vorlage von Jens Struckmeier (SS 2007)

Kapitel 1: Was sind Partielle Differentialgleichungen?

1.1 Allgemeine Notationen

x n
u m
Ordnung p

Definition:

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}\right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** (PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p–ter Ordnung $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$ explizit auf, so spricht man von einer partiellen DGL der **Ordnung** p.

Typischerweise treten in Anwendungen (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen **erster und zweiter Ordnung** auf.

Definition:

1) Eine PDE heißt **linear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin–linear in den Variablen $\mathbf{u}, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.

2) Eine PDE heißt **semilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin–linear in den Variablen $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist **und** die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ abhängen.

nicht linear

3) Eine PDE heißt **quasilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \ldots)$ affin–linear in den Variablen $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}\right)$ abhängen.

4) In allen anderen Fällen ist die PDE voll **nichtlinear**.

Beispiel:

1) Skalare lineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$n=2$
$m=1$
$p=1$

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y + b(x,y)u = c(x,y)$$

2) Skalare quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$n=2$
$m=1$
$p=1$

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y = g(x,y,u)$$

3) Semilineare PDE (System) 2. Ordnung in n Variablen

n
m
$p=2$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\mathbf{u}_{x_i x_j} = b(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{u},\mathbf{u}_{x_1},\ldots,\mathbf{u}_{x_n})$$

Voll

4) Nichtlineare skalare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$n=2$
$m=1$
$p=1$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x,y,u,u_x \cdot u_y)$$

$u_x \cdot u_x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$ linear $n=2$ $m=1$ $p=2$

$$u_t + u_x = 0$$ linear $n=2$ $m=1$ $p=1$

$$\begin{cases} \rho_t + j_x = 0 \\ j_t + \left(\frac{j^2}{\rho} + \rho\right)_x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Euler gl. d. Gasdynamik}}$ (isothermer Fall) $n=2$, $m=2$, $p=1$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ j \end{pmatrix}$$

quasilinear

ρ Dichte $[\rho] = kg\,m^{-3}$

j Fluß $[j] = kg\,s^{-1}$

$$j_t + \frac{2j}{\rho} j_x - \frac{j^2}{\rho^2}\rho_x + \rho_x = 0$$

$$\begin{aligned} &\rho_t + j_x = 0 \\ &j_t + \left(\frac{j^2}{\rho} + \rho_x\right) = \nu\, \frac{j}{\rho}\left(\frac{j}{\rho}\right)_{xx} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Navier Stokes gl.}}$

isotherm

$n=2$, $m=2$, $p=2$

quasilinear

$j = \rho u$ $\Downarrow$ ...

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &u_t + u u_x + (\ln \rho)_x = \nu\, u_{xx} \end{aligned}}$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}$$ $n=2$, $m=2$, $p=2$

semilinear

Bemerkung:

In Anwendungen treten typischerweise **Ortsvariablen** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ (oft $n = 3$) sowie die **Zeitvariable** $t \in \mathbb{R}$ auf.

Wir betrachten dann die allgemeine PDE der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = 0$$

in $(n+1)$ Variablen. Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla \quad \text{div} \quad \text{rot} \quad \text{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

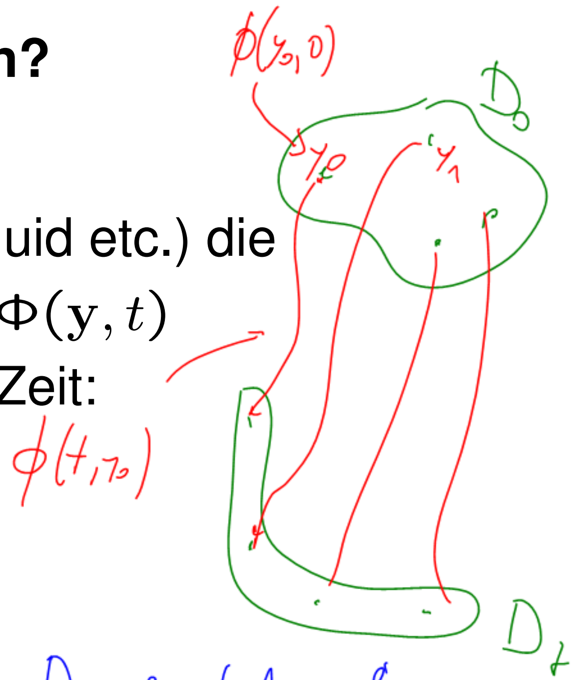
$$\text{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

1.2 Motivation: Wieso partielle Differentialgleichungen?

Der Reynoldsche Transportsatz:

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein. Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:



$$\Phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n$$

sodass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) \; : \; \mathbf{y} \in D_0\}$$

D_t verändert sich in der Zeit

Die **Trajektorie** von $y \in D_0$ ist die Abbildung $t \to \Phi(y, t) \in D_T$ und

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Reynoldscher Transportsatz:

Für eine beliebige differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}$$

Einfluß der Trajektorie

Beweisidee:

Sei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi–Matrix von $\Phi(\mathbf{y}, t)$ bzgl. $\mathbf{y}$.
Transformiere damit D_t auf D_0:

$$\int\limits_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t.

Die Kontinuitätsgleichung:

Sei $u(x,t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form:

Keine Quellen
keine Senken

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = 0$$

Dann folgt aus dem Reynoldschen Transportsatz:

$$\int_{D_t} \left\{\frac{\partial}{\partial t}u + \operatorname{div}(u\mathbf{v})\right\}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = 0$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}(u\mathbf{v})(\mathbf{x},t) = 0$$

1 Gleichung
2 Unbekannte u, v

Diese wichtige Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

Wir schreiben die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der **Flußfunktion** $q(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \text{div}\,(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0 \qquad q = u \cdot v$$

Eine Gleichung für zwei unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$?

Deshalb: Modellierungsansatz

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{q}(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \ldots)$$

Einfachstes Beispiel:

Der Fluß $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte u, i.e.

$$\mathbf{q}(x, t) := \mathbf{a} \cdot u(x, t), \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(x, t) = 0$$

$m = 1$
$p = 1$
linear

Man nennt diese Gleichung auch die **Transportgleichung**.

Beispiel: (**Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung**)

Die Dichte $u(x,t)$ beschreibe

- eine chemische Konzentration
- die Temperatur
- ein elektro–statisches Potential

Physikalische Modellierung: der Fluß $\mathbf{q}$ ist proportional zum Gradienten der Dichte u, zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung, i.e.

$$\boxed{\mathbf{q}(x,t) := -a\nabla u(x,t),} \qquad a > 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \text{div}\,(-a\nabla u(x,t)) = 0$$

und damit die partielle Differentialgleichung a konst.,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) = a\Delta u(x,t)}$$

$$\text{div}(\nabla u) = \Delta u$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = \Delta u$$