

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Sommersemester 2015

nach Vorlage von Jens Struckmeier (SS 2007)

Kapitel 1: Was sind Partielle Differentialgleichungen?

1.1 Allgemeine Notationen

Definition:

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$F \left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p} \right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** (PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p -ter Ordnung $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ explizit auf, so spricht man von einer partiellen DGL der **Ordnung** p .

Typischerweise treten in Anwendungen (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen **erster und zweiter Ordnung** auf.

Definition:

- 1) Eine PDE heißt **linear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
- 2) Eine PDE heißt **semilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist **und** die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ abhängen.
- 3) Eine PDE heißt **quasilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}} \right)$ abhängen.
- 4) In allen anderen Fällen ist die PDE **nichtlinear**.

Beispiel:

- 1) Skalare lineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = c(x, y)$$

- 2) Skalare quasilineare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = g(x, y, u)$$

- 3) Semilineare PDE (System) 2. Ordnung in n Variablen

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \mathbf{u}_{x_i x_j} = b(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n})$$

- 4) Nichtlineare skalare PDE 1. Ordnung in zwei Variablen

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y)$$

Bemerkung:

In Anwendungen treten typischerweise **Ortsvariablen** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (oft $n = 3$) sowie die **Zeitvariable** $t \in \mathbb{R}$ auf.

Wir betrachten dann die allgemeine PDE der Form

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p} \right) = 0$$

in $(n + 1)$ Variablen. Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla \quad \text{div} \quad \text{rot} \quad \text{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \text{div} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \Delta &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

1.2 Motivation: Wieso partielle Differentialgleichungen?

Der Reynoldzsche Transportsatz:

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein. Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit:

$$\Phi : D_0 \times [0, T] \rightarrow D_t \subset \mathbb{R}^n$$

sodass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}$$

Die **Trajektorie** von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung $t \rightarrow \Phi(\mathbf{y}, t) \in D_T$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Reynoldscher Transportsatz:

Für eine beliebige differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div} (f \mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

Beweisidee:

Sei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\Phi(\mathbf{y}, t)$ bzgl. $\mathbf{y}$.

Transformiere damit D_t auf D_0 :

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t .

Die Kontinuitätsgleichung:

Sei $u(x, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

Dann folgt aus dem Reynoldsen Transportatz:

$$\int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} (u \mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (u \mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0$$

Diese wichtige Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

Wir schreiben die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der **Flußfunktion** $q(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (q(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Eine Gleichung für zwei unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $q(\mathbf{x}, t)$?

Deshalb: Modellierungsansatz

$$q(\mathbf{x}, t) := q(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \dots)$$

Einfachstes Beispiel:

Der Fluß q ist proportional zur Dichte u , i.e.

$$q(x, t) := \mathbf{a} \cdot u(x, t), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(x, t) = 0$$

Man nennt diese Gleichung auch die **Transportgleichung**.

Beispiel: (Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung)

Die Dichte $u(x, t)$ beschreibe

- eine chemische Konzentration
- die Temperatur
- ein elektro–statisches Potential

Physikalische Modellierung: der Fluß q ist proportional zum Gradienten der Dichte u , zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung, i.e.

$$q(x, t) := -a \nabla u(x, t), \quad a > 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (-a \nabla u(x, t)) = 0$$

und damit die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = a \Delta u(x, t)$$

Setzen wir $a = 1$, so erhalten wir die klassische Wärmeleitungsgleichung oder auch (lineare) Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(x, t)$$

Die Abschlußrelation

$$\mathbf{q}(x, t) := -a \nabla u(x, t), \quad a > 0$$

nennt man dabei entweder

- das Ficksche Gesetz der Diffusion,
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung

Beachte: Drei unterschiedliche physikalische Probleme liefern eine identische partielle Differentialgleichung.

Beispiel:

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t , i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

so erhält man die **Laplacegleichung**

$$\Delta u(x) = 0$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man **harmonische Funktionen**.

Die Gleichung

$$\Delta u(x) = f$$

mit gegebener Funktion f , nennt man **Poissongleichung**.

Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential.

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t))$$

Daraus folgt aber sofort:

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition:

Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein **erstes Integral** des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Die Methode der Charakteristiken ist also nichts anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDE auf gewöhnliche DGL's.

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\dot{x} = x$$

$$\dot{y} = y$$

$$\dot{z} = x^2 + y^2$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t$$

$$y(t) = c_2 e^t$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3$$

Man nennt diese Lösungen auch die charakteristischen Kurven.

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die charakteristischen Kurven erfüllen aber die Beziehungen:

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven.

Daraus folgt die Lösungsdarstellung

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$ -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen.

Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u .

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Beweis:

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x, u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

und daraus folgt

$$- \left(\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} \right) U_u + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$(1 + x)u_x - (1 + y)u_y = y - x$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1 + x)U_x - (1 + y)U_y + (y - x)U_u = 0$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\dot{x} = 1 + x$$

$$\dot{y} = -(1 + y)$$

$$\dot{u} = y - x$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x(t) = c_1 e^t - 1$$

$$y(t) = c_2 e^{-t} - 1$$

$$u(t) = c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t$$

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad u + x + y = d \in \mathbb{R}$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungsdarstellung

$$\Phi((x+1)(y+1), u+x+y) = 0$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$ -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n + 1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert $\mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe:

Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a} \cdot \nabla u_0, \quad \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\dot{x} = tx, \quad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

$$u(x, t) = \sin \left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]$$

Wir kehren zu dem anfangs definierten Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

zurück.

Das charakteristische System lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u)$$

$$\dot{u} = b(\mathbf{x}, t, u)$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.

Beispiel: (für lokale Lösungen in der Zeit)

Eine wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension.

Das zugehörige Cauchy–Problem lautet:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die **Flußfunktion**.

Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDE ist

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$.

Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die **lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

Die wohl berühmteste Erhaltungsgleichung ist die sogenannte **Burgers Gleichung** * mit der Flußfunktion $f(u) = u^2/2$.

Wir betrachten im Folgenden das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

und verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

*Johannes Martinus Burgers, 1895–1981, niederländischer Physiker

Da die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ konstant bleibt, gilt

$$\dot{x} = u_0(x_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$$

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs!

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : x_0 \leq 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & : 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven:

Singularität der Lösung:

Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig.

In der Tat existiert die (klassische) Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur **lokal** in der Zeit für $0 \leq t < 1$.

Für $t \in [0, 1)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0, 1)$:

2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.

Die Burgers Gleichung aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, 1)$ die klassische Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Was passiert für $t \geq 1$?

Zunächst: Funktionen mit kompaktem Träger

Definition:

Der **Träger einer Funktion** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

Ist der Träger einer Funktion kompakt, so sprechen wir von einer **Funktion mit kompaktem Träger**.

Bemerkung:

Es gibt (viele) differenzierbare, ja sogar unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Diese spielen in der modernen Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle.

Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx = 0$$

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine **Testfunktion**.

Definition:

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine **Integrallösung** oder **schwache Lösung**, falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0) dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

Bemerkung:

Eine Integrallösung muß **keine** differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Definition: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein **Riemannproblem** für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel: Ein Riemannproblem für die **Burgers Gleichung** lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

1) **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung

Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte Stoßwelle

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq s(t) \\ u_r & : x > s(t) \end{cases}$$

eine Integrallösung.

Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.

Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist.

Diese Beziehung nennt man die **Rankine–Hugoniot Bedingung**.

Was sind in diesem Fall die Integrallösungen?

2) Verdünnungswelle bei der Burger's Gleichung

Für $u_l < u_r$ ist die sogenannte Verdünnungswelle eine Integrallösung:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq u_l t \\ \frac{x}{t} & : u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r & : x \geq u_r t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x, t)$ eine **stetige** Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l t$ und $x = u_r t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung:

Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Definition:

Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.

Satz:

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die **Rankine–Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi, t) d\xi = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi, t) d\xi \right) = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))$$

Da $u(x, t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1, t)), \quad f_2 := f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \rightarrow s(t)^-$ und $x_2 \rightarrow s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s} u(s(t)^-, t) - \dot{s} u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+))$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}$$

Beispiel

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.

Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \\ u_r & : x > \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \end{cases}$$

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion sei **strikt konvex**.

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}$$

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r)$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l) t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r) t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω , der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Satz:

Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis:

Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l) t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r) t$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l) t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)t$ und $x > f'(u_r)t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$u_t = -\frac{x}{t^2}g'(x/t)$$

$$f(u)_x = f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2}g'(x/t)$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Problem: Integrallösungen sind nicht **eindeutig!!**

Beispiel:

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & : x \leq t/2 \\ 1 & : x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x/t & : 0 \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition:

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$\exists C > 0$, sodass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t}z$$

Satz:

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

Kapitel 3: Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition: Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij} , b_i , f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Spezialfall:

Gilt $a_{ij} = \text{const.}$, $i, j = 1, \dots, n$, so lässt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

3.1 Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung (in Matrixschreibweise)

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Lineare Algebra: Hauptachsentransformation

Jede reelle, symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ ist **diagonalisierbar**. Weiter gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

wobei $\mathbf{S}$ als eine **orthogonale** Matrix gewählt werden kann.

Bemerkung: Eine reelle Matrix $\mathbf{S}$ ist **orthogonal**, falls gilt:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$$

Ansatz zur Herleitung von Normalformen:

Verwende die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$$

und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S} \mathbf{y})$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \nabla_y \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise

$$\nabla_x = \mathbf{S} \nabla_y$$

Transponieren wir diese Beziehung, so folgt

$$\nabla_x^T = (\mathbf{S} \nabla_y)^T = \nabla_y^T \mathbf{S}^T$$

Ergebnis:

Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^t \nabla) u + f u = g$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^t \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDE gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D} \nabla)\tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S} \mathbf{y})$ und

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{S} \mathbf{y}) \quad \tilde{g}(\mathbf{y}) := g(\mathbf{S} \mathbf{y})$$

Beispiel:

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \\ b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2)$$

Mit $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}}$ lautet die Diagonalform

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Beachte:

Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, allerdings sind die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** gerade die **Eigenwerte** der Ausgangsmatrix $\mathbf{A}$.

Definition: (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^t \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

- 1) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch**.
- 2) Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch**.
- 3) Ist mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ gleich Null, so nennt man die Gleichung **parabolisch**.

Beispiel:

Wir betrachten wiederum den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \\ b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2)$$

Dann ist die **Diagonalform** gegeben durch:

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Die partielle Differentialgleichung heißt

- 1) **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist.
- 2) **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist.
- 3) **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

Bemerkung:

Die Typeneinteilung lässt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** Koeffizientenmatrix A erweitern: die Gleichung

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Die Diskriminante D lautet daher

$$D = 1 - xy$$

Die Gleichung ist also **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$, **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

Beispiel:

Die Tricomi–Gleichung

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = g(x, y)$$

ist **elliptisch** für $k(y) < 0$, **hyperbolisch** für $k(y) > 0$ und **parabolisch** für $k(y) = 0$.

Zentrale Frage:

Wieso macht man eine solche Typeneinteilung?

Zentrale Antwort:

Jede Typenklasse hat charakteristisches Lösungsverhalten!

Normalformen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Definition:

- 1) Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g$$

- 2) Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n + 1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + f u = g$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace-Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

- 3) Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n + 1)$ Variablen $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + f u = g$$

wobei Δ wiederum den Laplace–Operator bezüglich x bezeichnet.

Klassische Beispiele:

- 1) **Elliptische** Laplacegleichung

$$\Delta u = 0,$$

- 2) **Hyperbolische** Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

- 3) **Parabolische** Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u,$$

3.2 Korrekt gestellte Probleme

Definition:

Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs– und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) **Existenz:**

Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.

2) **Eindeutigkeit:**

Die Lösung ist eindeutig.

3) **Stabilität:**

Die Lösung hängt stetig von den Anfangs– bzw. Randbedingungen ab, d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

Eindimensionale Wellengleichung

Beispiel:

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_t = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem.

Physikalische Motivation:

Die Wellengleichung beschreibt das dynamische Verhalten einer eingespannten Saite, die zur Zeit $t = 0$

- 1) um die Funktion $u_0(x)$ ausgelenkt ist und
- 2) sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist (**Formel von d'Alembert**):

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi$$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten:

Sei $\tilde{u}(x, t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x - ct) - u_0(x - ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + ct) - u_0(x + ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + t\|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty$$

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel: (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

ist ein **nicht korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = 0$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$u_o^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

so ist die eindeutig bestimmte Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

Nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n = u_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^n = v_0$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty \quad (y > 0)$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(x, y) \neq u(x, y)$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.

Randwertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel:

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die

Poissonsche Integralformel

gegeben:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\|\mathbf{z}\|=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2} d\sigma$$

Kapitel 4: Die Laplacegleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0, \quad u = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und der zugehörigen Poissongleichung

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition:

Eine $\mathcal{C}^2$ -Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$\Delta u = 0,$$

nennt man eine **harmonische Funktion**.

4.1 Die Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine explizite Lösung der Laplacegleichung zu berechnen, mit Hilfe der wir weitere Lösungsdarstellungen ableiten können.

Beobachtung:

Der Laplaceoperator Δ ist invariant gegenüber Rotationen in $\mathbb{R}^n$

Lösungsansatz:

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Man rechnet leicht nach:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Setzen wir $w = v' \neq 0$, so löst w die lineare Differentialgleichung

$$w' = -\frac{n-1}{r}w$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung in der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c .

Definition:

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, nennt man die **Fundamentallösung der Laplacegleichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung:

Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ eine harmonische Funktion.

Beispiel:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\text{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und damit ist die Fundamentallösung gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$$

Satz: (Darstellung der Lösung der Poissonggleichung)

Eine Lösung der Possiongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Die Mittelwerteigenschaft:

Eine besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen ist, dass der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$ ist.

Satz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(U)$ harmonisch, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS = \oint_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation:

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\oint \dots = \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \dots$$

Beweis:

Wir definieren für festes $\mathbf{x} \in U$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) dS(\mathbf{z})$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u d\mathbf{y} &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{x}, s)} u dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u d\mathbf{y}$$

Es gilt auch folgende Umkehrung

Satz:

Für die Funktion $u \in C^2(U)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, dann ist u harmonisch.

Beweis:

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} > 0$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch.

Das **Maximumprinzip** harmonischer Funktionen:

Satz: Sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ harmonisch in U . Dann gilt:

1) **Maximumprinzip**

$$\max_{x \in \bar{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

2) **Starkes Maximumprinzip**

Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit

$$u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x)$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweisidee:

Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen.

Wichtige Folgerung aus dem Maximumprinzip:

⇒ **Eindeutige Lösung der Randwertaufgabe**

Satz: Sei $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } U \\ u &= g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Beweis:

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 & \text{in } U \\ u &= 0 & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 = u_2$.

Weitere Eigenschaften:

1) Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in C^\infty(U)$.

2) **Satz von Liouville:**

Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.

3) **Beschränkte** Lösungen der Poissongleichung:

Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C .

4.3 Die Greensche Funktion

Definition:

1) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Dirichlet–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

2) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Neumann–Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

Hierbei bezeichnet n die äußere Normale an ∂U .

Proposition:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ & - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Die Funktion Φ bezeichnet dabei wieder die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Beweis: Greensche Formeln aus Analysis III.

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace– und Poissongleichung:

Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.

Definition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } U \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz:

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poissongleichung. Dann läßt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.

Beweis:

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} (\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) dS(\mathbf{y}) - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von $\partial u / \partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

Nach den Greenschen Formeln gilt aber

$$- \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ folgt

$$\int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) = & \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} \right) dS(\mathbf{y}) \\ & + \int_U \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Eigenschaften der Greenschen Funktion

- 1) die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$,
- 2) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U,$$

- 3) die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,
- 4) die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Beispiele:

- 1) die Greensche Funktion für den Halbraum

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : x_n > 0\},$$

- 2) die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0, 1)$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$:

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}_+^n$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^n)$$

Dann ist $\Phi^x(\mathbf{y})$ harmonisch auf dem **ganzen** Halbraum $\mathbb{R}_+^n$ und auf dem Rand gilt:

$$\begin{aligned}\Phi^x(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) \\ &= \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ abhängt.

Also löst die Funktion $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T : y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$ lautet

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^n} \right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

Definition:

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n)$$

nennt man auch den Poissonkern von $\mathbb{R}_+^n$.

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar **unendlich oft differenzierbar** ist.

Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0, 1)$:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den **dualen Punkt** von $\mathbf{x}$ bezüglich $\partial B(0, 1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } B^0(0, 1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

und wir erhalten folgende Greensche Funktion für die Einheitskugel:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0, 1), \mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

Satz: (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y})$$

Der **Poissonkern** für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad (|\mathbf{x}| < 1, |\mathbf{y}| = 1)$$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < r\}$ ableiten.

Kapitel 5: Die Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen explizite Lösungen der **Wärmeleitungsgleichung**

$$u_t = \Delta_x u$$

Hier ist $t \geq 0$ die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**.

Anfangswertproblem: (Cauchy–Problem)

Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Anfangs–Randwertproblem:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } U_T := U \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T \end{cases}$$

5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = a(t), u(\pi, t) = b(t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Wir suchen eine Lösung mittels des **Produktansatzes**:

$$u(x, t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad (p(x) \neq 0, q(t) \neq 0)$$

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad (p(x) \neq 0, q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const} =: -\delta$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0 \quad \text{und} \quad p''(x) + \delta p(x) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0 e^{-\delta t},$$

Die Lösung der Gleichung $p''(x) + \delta p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten δ ab:

1) Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2$$

2) Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}$$

3) Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$$

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen:

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2)$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|x}} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|x}})$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))$$

Die vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen lauten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = a(t), \quad u(\pi, t) = b(t)$$

Fazit:

Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann i.A. nicht gegebene Funktionen $u_0(x)$, $a(t)$ und $b(t)$ beschreiben.

Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs– und Randbedingungen eine explizite Lösung.

Beispiel:

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \sin x & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))$$

Wegen der Vorgabe $u(x, 0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!

Superpositionsprinzip: Jede Lösung der Form

$$u(x, t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

erfüllt die homogenen Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

Eine Überlagerung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Für eine gegebene Anfangsbedingung $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Entwicklung in eine **Fourier-Reihe**, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

5.2 Die Fundamentallösung

Definition:

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1$$

Bemerkung:

Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität.

Mit Hilfe von $\Phi(x, t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Herleitung der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):

Ist $u(x, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Ansatz:

Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/2}} v \left(\frac{x}{t^{1/2}} \right)$$

Man berechnet nun

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v'$$

$$u_x(x, t) = t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v'$$

$$u_{xx}(x, t) = t^{-3/2} \cdot v''$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0$$

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v' + v'' = 0$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v'(r) = 0$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Weitere **Lösungsdarstellungen** mit Hilfe der Fundamentallösung:

- 1) Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \end{aligned}$$

1) Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s :

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds$$

2) Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds$$

5.3 Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung **Mittelwertformeln**, die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$U_T := U \times (0, T]$$

den **parabolischen Zylinder** und

$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$$

den **parabolischen Rand**.

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

Bemerkung:

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz:

Ist $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_T$.

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz:

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T . Dann gilt

- 1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

- 2) Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\bar{U}_{t_0}$ konstant ist.

Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

Satz:

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

auf dem beschränkten Gebiet U mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Satz: Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Beispiel:

In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Kapitel 6: Die Wellengleichung

In diesem Kapitel untersuchen wir die **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die **inhomogene Wellengleichung** der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

6.1 Die Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Beobachtung:

Die Differentialgleichung läßt auf folgende Weise faktorisieren:
es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

so erhalten wir eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x, t) = a(x - t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = a(x)$$

Wegen

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t)$$

ist $u(x, t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$$u_t - u_x = a(x - t)$$

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + u(x + t, 0) \\&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + u(x + t, 0) \\&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t)\end{aligned}$$

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x, 0) = h(x)$$

erfüllen.

Man berechnet

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (a(x+t) + a(x-t)) + g'(x+t)$$

und damit

$$u_t(x, 0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x)$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} g(x+t) + \frac{1}{2} g(x-t) + g(x+t) \end{aligned}$$

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert**.

Bemerkung:

Damit diese Lösung $u(x, t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen fordern:

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

Beispiel zur Formel von d'Alembert:

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(x + t) + \sin(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\sin(x + t) + \sin(x - t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sin(x + t) - \sin(x - t)) \\ &= \sin(x + t) \end{aligned}$$

Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, \quad u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x, t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + t) + \tilde{g}(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$$

Fallunterscheidung:

1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + t) + \tilde{g}(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \end{aligned}$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein.

2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(-(x-t))) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) - \frac{1}{2} \int_0^{t-x} h(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} h(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy
 \end{aligned}$$

Gesamtlösung:

Wir erhalten also als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

6.2 Lösungen der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee:

Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x, t)$ über die Kugel $\partial B(x, r)$,

$$U(x; r, t) := \oint_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y)$$

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x; r) &:= \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y) \\ H(x; r) &:= \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y) \end{cases}$$

Satz:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x; r, t)$ die **Euler–Poisson–Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Beweis:

Einer früheren Beobachtung folgend (siehe Seite 71 des Skripts) gilt:

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy$$

Beweis: (Fortsetzung)

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x,r)} u_{tt}(y, t) dy$$

und damit

$$r^{n-1}U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1}U_{tt}$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0$$

Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\tilde{U} := rU$$

$$\tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r + t) - \tilde{G}(t - r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch spärliche Mittelung entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t)$$

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}(r + t) - \tilde{G}(t - r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) \\
 &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)
 \end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H , so erhält man

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (tG(x; t)) + tH(x; t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h dS
 \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\oint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \oint_{\partial B(0,1)} g(x + tz) dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{\partial B(x,t)} g dS \right) &= \oint_{\partial B(0,1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \oint_{\partial B(x,t)} Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \oint_{\partial B(x,t)} t Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y) + \oint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \\ &\quad + \oint_{\partial B(x,t)} t h dS(y) \end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Die Poissonsche Formel für $n = 2$:

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung:

Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, i.e. Verwendung der EPD Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.

Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

7.1. Beispiel: Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -T \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < l \\ u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung:

Die Lösung $u(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \dots, c_N$.

Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Damit sind die homogenen Randbedingungen für **alle** Lösungskoeffizienten $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen die Koeffizienten b_n so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^N \frac{T n^2 \pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Für die Koeffizienten $b_1, \dots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2}, \quad n = 1, \dots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2 \sin(2\pi x) + 5 \sin(3\pi x)$

und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2} \sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2} \sin(3\pi x)$$

Der allgemeine Fall:

Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier-Reihe** $f_N(x)$, d.h.

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, \dots, N$$

Siehe Analysis II: Fourier-Reihen (Kapitel 10, 11)

Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch:

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Randwertproblem

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = x, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

Die exakte Lösung lässt sich durch **Integration** berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

Wir berechnen nun zunächst die Fourier–Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x,$$

also

$$c_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \dots, N$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x)$$

Wir erhalten etwa

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3} \sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3} \sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3} \sin(4\pi x)$$

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung: mit

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1 - x^2)$$

folgt für die Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\pi x)$$

die Darstellung der Fourier–Koeffizienten

$$a_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{6}x(1 - x^2) \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}$$

Dies sind aber gerade die (Fourier–)Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

7.2. Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Bemerkung:

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Für die Koeffizienten der Fourier–Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Gleichzeitig können wir die Inhomogenität $f(x, t)$ in einer Fourier–Reihe darstellen, d.h.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Wir berechnen nun die Orts– und Zeitableitungen des Lösungsansatzes

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

und erhalten

die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier-Reihe von $f(x, t)$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = c_n(t)$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \dots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

und daher

$$a_n(0) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

Die Lösung lässt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot (t-s)\right) c_n(s) ds$$

Beispiel:

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = u(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Beobachtung:

- 1) Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \rightarrow \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.
- 2) Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \rightarrow \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Beispiel:

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$b_n = 0$$

$$c_n(t) = c_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

und damit

$$a_n(t) = 2 \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} ds = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} \left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right)$$

Bis jetzt:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Was passiert

1) bei (einseitig **Neumannschen**) Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$

2) bei **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t)$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Bemerkung:

Beschreibt die Funktion $u(x, t)$ eine orts– und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

- 1) die Bedingung $u(0, t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0, l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,
- 2) die Bedingung $u_x(l, t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluß nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist **perfekt wärmeisoliert**.

Die Fourier–Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x, t) = \sin \left(\frac{\pi x}{2l} \right)$$

erfüllt.

Diese Funktion beschreibt gerade eine Viertel–Sinuswelle.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran eine halbe Sinuswelle anhängen, also

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Die Funktionen höherer Frequenzen sind dann von der Form

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2$$

Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n - 1)\pi x}{2l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25| \right) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{100} \right) dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2} \sin(n\pi/2) + \sqrt{2} \cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2} \end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier-Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{10000} t}$$

Sind beide Enden **wärmeisoliert**, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x, t) = 1, \quad u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel:

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0$$

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0, \quad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2}b_n(t) = 0$$

Um die zugehörigen Anfangsbedingungen festzulegen, bestimmen wir die Fourier–Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x) dx$$

$$d_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$$

Man berechnet

$$d_0 = \frac{5}{2}$$

$$d_n = \frac{20(2 \cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \dots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2500}$$

und die Lösung lautet

$$u(x, t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Wir kommen nun zu **periodischen** Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$f(x, t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) + d_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right)$$

$$g(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) + q_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \right)$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{da_0}{dt}(t) = c_0(t)$$

$$\frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a_n(t) = c_n(t)$$

$$\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}b_n(t) = d_n(t)$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel:

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = \frac{1}{10}x(x^2 - \pi^2) & : \quad -\pi < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 25 & : \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & : \quad 0 \leq t \leq T \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) & : \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist die Fourier-Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5} \left(1 - e^{-n^2 t}\right) \sin(nx)$$

7.3. Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Lösungen in Form von Fourier–Reihen lassen sich analog zur Wärmeleitungsgleichung ableiten.

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x, t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Beispiel:

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} t \right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{l} t \right) \right\} \sin \left(\frac{n\pi x}{l} \right)$$

Dabei sind b_n die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x, 0) = h(x)$.

Kapitel 8: Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Zur numerischen Lösung gibt es **drei** klassische Ansätze:

1) **Finite-Differenzen**

Approximation auf regulären (strukturierten) Gittern, einfache Geometrien, häufig eindimensional im Ort, alle Typen

2) **Finite-Volumen**

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, vor allem hyperbolische Gleichungen

3) **Finite-Elemente**

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, komplizierte Geometrien, vor allem elliptische Gleichungen

Wir beschränken uns auf die Darstellung von **Finiten-Differenzen-** und **Finite-Element-Methoden**.

8.1 Die Methode der Finiten–Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

- 1) Cauchy–Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- 2) Randwertprobleme für die **Poissonsgleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

- 3) Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Idee bei Finiten–Differenzen:

Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i := i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \quad t_j := j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$

und den **Orts– und Zeitschrittweiten** h und k . Die Indexmengen $\mathcal{Z}_x$ und $\mathcal{Z}_t$ sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

Beispiel: Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$x_i := i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

$$t_j := j \cdot k, \quad j = 0, \dots, m$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h := \frac{1}{n}, \quad k := \frac{T}{m}$$

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen:

Beispiel:

Wir approximieren die Ableitung $u_x(x, t)$ an der Stelle $(x, t) = (x_i, t_j)$:

1) Zentrale Differenzen

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

2) Vorwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3) Rückwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$

Approximationsgüte von Finiten–Differenzen

Sei $u(x, t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts– und Zeitschrittweite h und k .

Mittels einer Taylorentwicklung um (x_i, t_j) erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \\ &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \dots \\ u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \\ &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \dots \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

1) bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Approximation **zweiter** Ordnung in h .

2) bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h .

3) bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation **erster** Ordnung in h .

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten–Differenzen gegeben durch

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j) \right)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} u_0(x) dx$$

Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

Fazit: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**

Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind–Verfahren: funktioniert unter der CFL–Bedingung $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h} (U_i^j - U_{i-1}^j)$$

Lax–Friedrichs–Verfahren: funktioniert wie das Upwind–Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$

Finite-Differenzen für die Poissongleichung

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der zweiten Ableitung:

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0$$

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (U_1, \dots, U_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fazit:

Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $U_1, \dots, U_{n-1}$.

Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)$$

2) Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

erhalten wir das **implizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die θ -Methode

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} = & U_i^j + \frac{k}{h^2}[\theta(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) \\ & + (1 - \theta)(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)] \end{aligned}$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das **Crank–Nicholson–Verfahren**.

Bemerkungen:

- 1) Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Man nennt diese Bedingung eine **Stabilitätsbedingung**.

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muß man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- 2) Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil.

Zur Berechnung der Lösung muß man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.

- 3) Bei Verfahren sind erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt:

$$e(T) = O(k) + O(h^2)$$

Bemerkungen: (Fortsetzung)

4) Die Stabilitätsbedingung für die θ -Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ -Methode stets stabil.

5) Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, d.h. es gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2)$$

Für keinen anderen Wert von θ gilt ein entsprechendes Resultat.

Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

8.1 Die Methode der Finiten–Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

FE–Methoden basieren auf drei grundlegenden Ideen:

- 1) Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- 2) Die **Galerkin Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich–dimensionalen** Finite–Element–Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.

- 3) Als Basis des endlich-dimensionalen FE-Raums wählt man **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

Die schwache Form des Randwertproblems

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in C^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form:

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen:

Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und **wichtiger**, es gilt ebenfalls die **Umkehrung**.

Fazit: Beide Darstellungen sind also äquivalent.

Die Galerkin–Methode

Definieren wir

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

so ist $a(\cdot, \cdot)$ eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt.

Mit Hilfe der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

läßt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben:

finde ein $u \in V$, sodass $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$ gilt

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich-dimensionalen Raum V_n , den sogenannten **Finite-Element-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$ gilt

Dieses Problem läßt sich auf ein lineares Gleichungssystem reduzieren:

Sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n . Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j$$

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt:

$$a \left(\sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i \right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix** $\mathbf{A}$ und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten $u_1, \dots, u_n$.

Approximation der stückweise Polynome

Zur Konstruktion von FE-Räumen machen wir folgende Vorüberlegungen:

- 1) Am besten wären FE-Räume V_n , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- 2) Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite **einfach** zu berechnen sein.
- 3) Die Basis von V_n sollte **fast** orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit **dünn besetzt**.
- 4) Die exakte Lösung u des Problems sollte **möglichst gut** durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sollte die Approximation **beliebig gut** werden.

Daher: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise **lineare** Funktion.