Fachbereich Mathematik **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser

Modulklausur
Differentialgleichungen II

28. August 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum$ =

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= x\cos(\pi t) && \text{für } x \in (0,\pi), t > 0,\\ u(x,0) &= 4\sin(2x) + 1 - \frac{x}{\pi} && \text{für } x \in (0,\pi),\\ u(0,t) = 1, \quad u(\pi,t) &= \sin(\pi t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 2v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,\pi), t > 0,\\ v(x,0) &= 4\sin(2x) && \text{für } x \in (0,\pi),\\ v(0,t) = 0, \quad v(\pi,t) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Lösungsskizze:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{\pi}(\sin(\pi t) - 1) = u(x,t) - 1 + \frac{x}{\pi} - \frac{x}{\pi}\sin(\pi t)$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 - \frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi}\sin(\pi t). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \frac{x}{\pi}\cos(\pi t)\pi = v_t + x\cos(\pi t), \qquad v_{xx} = u_{xx} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Neue DGL: $\quad v_t + x\cos(\pi t) - 2v_{xx} = x\cos(\pi t) \iff$

$\boxed{v_t - 2v_{xx} = 0}$ **[1 Punkt]**

Anfangswerte:

$$v(x,0) = u(x,0) - 1 - \frac{x}{\pi}(\sin(0) - 1) \iff \boxed{v(x,0) = 4\sin(2x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(\pi,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{\pi} = 1$ und $c = 2$ gilt:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t}\sin(k\omega x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2k^2 t}\sin(kx)$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \stackrel{!}{=} 4\sin(2x) \Longrightarrow a_2 = 4,\ a_k = 0 \qquad \forall k \neq 2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

und damit $\boxed{v(x,t) = 4\,e^{-2\cdot 2^2 t}\sin(2x) = 4\,e^{-8t}\sin(2x)}$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + (u+2)u_x &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \frac{1-x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

für $0 < t < t^*$ mit einem hinreichend kleinen t^* .

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) In welchen Intervallen $]0, t^*[$ ist die Lösung aus a) definiert?

c) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie bitte Ihre Antwort.

d) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$.

Lösung zu 2:

a) Erweitertes Problem $\quad U_t + (u+2)U_x + 0 \cdot U_u = 0$ ergibt:

$$\frac{dx}{dt} = u+2, \qquad \frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$u = C, \qquad dx = (C+2)dt$$

$$\Longrightarrow x(t) = Ct + 2t + D \Longrightarrow D = x - (u+2)t\,.$$

$$C = f(D) \Longrightarrow u = f(x-(u+2)t) \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Anfangswerte liefern :

$$u(x,0) = f(x) \Longrightarrow f(x) = \frac{1-x}{2} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$u = \frac{1-x+ut+2t}{2}$$

$$\Longrightarrow 2u - ut = 1 - x + 2t \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1-x+2t}{2-t}\,. \ \textbf{[1 Punkt]}$$

b) Die Lösung aus a) ist für $0 < t < 2$ definiert. **[1 Punkt]**

c) Auf den Charakteristiken gilt

$\dfrac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow u$ ist also konstant. Außerdem gilt

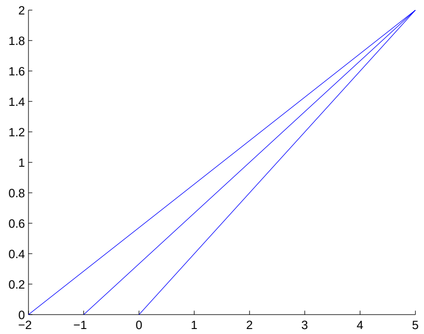
$\dfrac{dx}{dt} = u+2 \qquad \Longrightarrow$ also ist $\dfrac{dx}{dt}$ konsant entlang der Charakteristik. D.h.

die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden. **[2 Punkte]**

d) Die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$

[2 Punkte]

x_0	$u_0 = u(x_0, 0)$	Steigung $u_0 + 2$
-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
-1	1	3
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$



Aufgabe 3: Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an. Es können 1-3 Antworten pro Teilaufgabe richtig sein!

Für die gesamte Aufgabe 3 gilt: $u = u(x,t)$, $a \in \mathbb{R}$,

a) ☒ Die Charakteristikenmethode führt das Lösen einer partiellen Differentialgleichung auf das Lösen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück.

☒ Die Charakteristikenmethode ist zur Lösung bestimmter partieller Differentialgleichungen erster Ordnung konzipiert.

☐ Anfangswertaufgaben vom Typ $u_t + (f(u))_x = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ können immer mit der Charakteristikenmethode gelöst werden.

b) Die Gleichung $u_t + a \cdot (u^2)_x = b$, ist

☐ linear;

☒ quasilinear;

☐ eine Gleichung zweiter Ordnung.

c) ☐ Mit dem Produktansatz kann man jede partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen;

☐ Die Transformation einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf Normalform ermöglicht stets das Lösen der Differentialgleichung ;

☒ Die Transformation einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf Normalform ermöglicht Rückschlüsse auf das qualitative Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung.

d) ☒ Stoßwellen/Shocks sind spezielle Integrallösungen;

☐ Integrallösungen sind immer eindeutig;

☒ Jede klassische Lösung einer Differentialgleichung ist auch eine Integrallösung.