Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. I. Gasser

WiSe 2015/16

Modulklausur
Differentialgleichungen II

18. Februar 2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Lösen Sie die **3** angegebenen Aufgaben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte) Bitte kreuzen Sie die richtige(n) Antwort(en) an. Es können 1-3 Antworten pro Teilaufgabe richtig sein!

Für die gesamte Aufgabe 1 gilt: $u = u(x,t)$.

a) Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung sind im schlimmsten Fall

- [ ] semilinear;
- [ ] quasilinear;
- [x] voll nichtlinear.

b) Für Anfangswertaufgaben vom Typ $u_t + (f(u))_x = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$ kann man schwächere Lösungsbegriffe (Integrallösungen) einführen, die

- [x] mehr Lösungen zulassen;
- [ ] weniger Lösungen zulassen;
- [ ] nur Lösungen zulassen, die der Entropiebedingung genügen.

c)
- [ ] Ein Produktansatz liefert immer gewisse Lösungen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- [ ] Linearkombinationen von Lösungen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man mit dem Produktansatz erhält, sind ebenfalls Lösungen dieser Differentialgleichung.
- [x] Bei der Fourier-Methode werden Linearkombinationen von Produktansätzen benutzt..

d)
- [ ] Die Fundamentallösung ist die eindeutige Lösung der Laplacegleichung im $\mathbb{R}^n$.
- [x] Harmonische Funktionen erfüllen eine Mittelwerteigenschaft.
- [x] Die Poissongleichung hat auf beschränktem, glatten Gebiet mit Dirichlet-Randbedingungen höchstens eine Lösung.

Aufgabe 2: (9 Punkte)

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -x \cdot \sin(t) && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - x + 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in (0,1), \\ u_t(x,0) &= x + 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in (0,1), \\ u(0,t) = 1, &\quad u(1,t) = \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) &= 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in (0,1), \\ v_t(x,0) &= 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in (0,1), \\ v(0,t) = 0, &\quad v(1,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Lösungsskizze:

a) Homogenisierung:

$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \dfrac{x}{L}(\sin(t) - 1) = u(x,t) - 1 - x\sin(t) + x\,.$

oder

$u(x,t) = v(x,t) + 1 + x\sin(t) - x.$ **[1 Punkt]**

Dann gilt:

$u_t = v_t + x\ \cos(t),\ u_x = v_x + \sin(t) - 1$
$u_{tt} = v_{tt} - x\ \sin(t),\ v_{xx} = u_{xx}$ **[1 Punkt]**

Neue DGL:

$v_{tt} - x\sin(t) - 4v_{xx} = -x \cdot \sin(t) \iff \boxed{v_t - 4v_{xx} = 0\,.}$ **[1 Punkt]**

Anfangswerte:

$v(x,0) = u(x,0) - 1 - x(\sin(0) - 1) = 1 - x + 4\sin(2\pi x) - 1 + x \Longrightarrow$

$\boxed{v(x,0) = 4\sin(2\pi x)}$ **[1 Punkt]**

$v_t(x,0) = u_t(x,0) - x\cos(0) = x + 3\sin(6\pi x) - x \Longrightarrow$

$\boxed{v_t(x,0) = 3\sin(6\pi x)}$ **[1 Punkt]**

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(1,t) = 0}$

b) Mit $L = 1$ und $c^2 = 4$ lautet die Lösungsformel:

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \, \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) \;+\; B_k \, \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right)\right] \, \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Für $t = 0$ also

$$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin\left(k\pi x\right) \;\stackrel{!}{=}\; 4\sin(2\pi x)$$

Also $A_2 = 4$ und $A_k = 0$ sonst. **[2 Punkte]**

$$v_t(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[-A_k \cdot 2k\pi \cdot \sin\left(2k\pi t\right) \;+\; B_k \;\cdot 2k\pi \cdot \cos\left(2k\pi t\right)\right] \, \sin\left(k\pi x\right)$$

und für $t = 0$:

$$v_t(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} B_k \;\cdot 2k\pi \, \sin\left(k\pi x\right) \stackrel{!}{=} 3\sin(6\pi x)$$

Also $B_6 = \frac{3}{2 \cdot 6 \cdot \pi} \;=\; \frac{1}{4\pi}$ und $B_k = 0$ sonst.

$$v(x,t) \;=\; 4\,\cos\left(4\pi t\right)\,\sin\left(2\pi x\right) \;+\; \frac{1}{4\pi}\,\sin\left(12\pi t\right)\,\sin\left(6\pi x\right)$$ **[2 Punkte]**

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Gesucht ist eine Entropielösung der folgenden Anfangswertaufgabe für die Burgers Gleichung

$$u_t + u \cdot u_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$$

für $0 < t < t_0$ mit einem hinreichend kleinen t_0 .

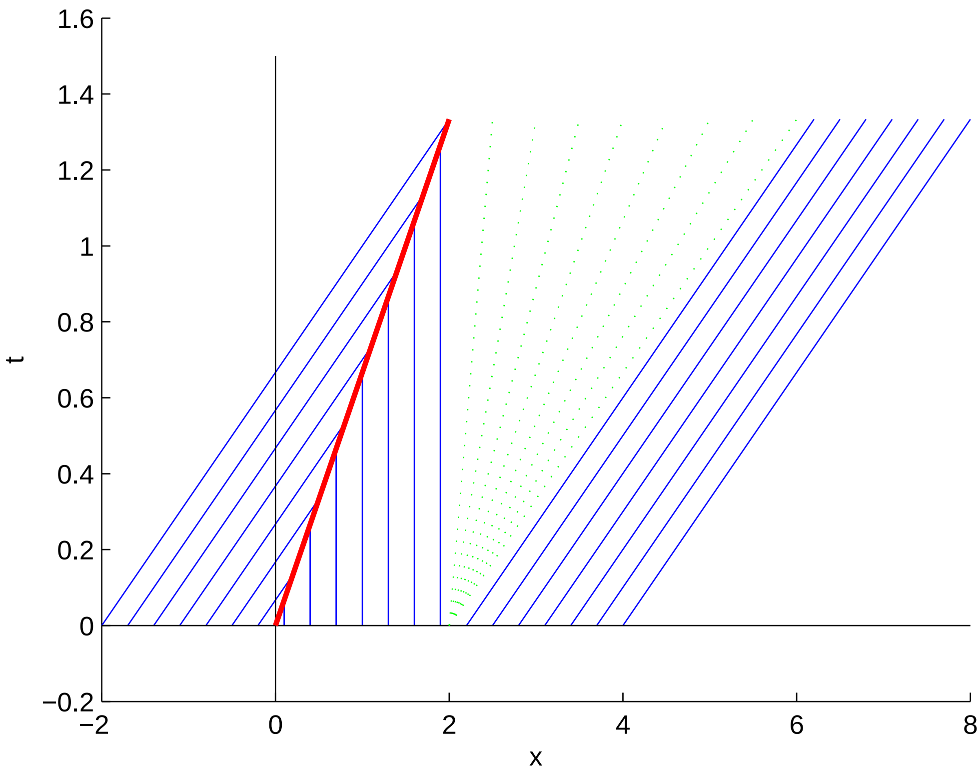
a) Fertigen Sie eine Skizze der Charakteristiken durch die Punkte $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$ an.

b) Bestimmen Sie die Entropielösung für $0 < t < \frac{4}{3}$.

c) Gilt die Lösung aus b) auch für $t > \frac{4}{3}$ t.

Lösung zu 2a:

a) Skizze: **[2 Punkte]**



b) Stoßwelle startend in $(0,0)$ mit $\dot{s}(t) = \dfrac{3+0}{2}$ **[1 Punkt]**

Verdünnungswelle startend in $(2,0)$ mit $u(x,t) = \dfrac{x-2}{t}$

Linke Begrenzung: $x = 2$, rechte Begrenzung $x = 2 + 3t$ **[2 Punkte]**

$$u(x,t) = \begin{cases} 3 & x < \frac{3}{2}t \\ 0 & \frac{3}{2}t < x \leq 2 \\ \frac{x-2}{t} & 2 \leq x \leq 2+3t \\ 3 & 2+3t \leq x \end{cases} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) Die Lösung gilt für $t > \frac{4}{3}$ nicht. Zu diesem Zeitpunkt trifft die Stosswelle auf die Verdünnungswelle. **[1 Punkt]**