Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = \ 0 \quad & \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0 \quad & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = e^x. \quad & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tip: Verwenden Sie die Faktorisierungsmethode aus Abschnitt 6.1. der Vorlesung.

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung von der Richtigkeit ihrer Lösung.

Aufgabe 2: *(Damit Sie nicht auf die Idee kommen, dass man alles mit einfachen Produktansätzen lösen kann.)*

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) \ = \ U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält U als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$$U_{tt} \ - \ c^2 U_{xx} \ + \ (\alpha + \beta) U_t \ + \ \alpha\beta U \ = \ 0\,.$$

Dabei sind α, β, c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung (Faktor e^{-kx}) mit einem zeitlich periodischen Verlauf (also Cosinus/Sinus in t) verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt. Zum Beispiel also:

$$U(x,t) := \ e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(\mu t - \kappa x) \ + \ \tilde{\delta} \sin(\tilde{\mu} t - \tilde{\kappa} x) \Big)$$

Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.