Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gesucht ist eine Näherung für die Lösung des folgenden Problems

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} && x \in (0, 2\pi),\ t > 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}\\
&u_t(x,0) = 0 && x \in (0, 2\pi)\\
&u(0,t) = u(2\pi, t) = 0 && t > 0
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie die 2π periodische Fortsetzung der Anfangsdaten für $x \in [-2\pi, 4\pi]$.

Bestimmen Sie eine Näherung $\tilde{u}$ für die Lösung u der Aufgabe indem Sie die auftretenden Fourier-Reihen nach dem dritten Term abbrechen. Prüfen Sie nach, welche Rand– bzw. Anfangsbedingungen bereits durch diese Näherungslösung erfüllt wird.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\ 3),\ t > 0,\\
&u(x,0) = 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
&u_t(x,0) = \frac{x}{3} && x \in (0,3), \qquad (1)\\
&u(0,t) = e^{-t} && t \geq 0,\\
&u(3,t) = 1 && t \geq 0.
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randdaten gemäß

$$v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$$

zur folgenden Anfangsrandwertaufgabe für v führt:

$$
\begin{aligned}
v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && x \in (0,\, 3),\ t > 0, \\
v(x,0) &= 2\sin(\pi x) && x \in [0,3], \\
v_t(x,0) &= 1 && x \in (0,3), \qquad (2) \\
v(0,t) &= 0 && t \geq 0, \\
v(3,t) &= 0 && t \geq 0.
\end{aligned}
$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil a) und geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe (1) an.

Bearbeitungstermine: 22.6.15 - 26.6.15