

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** Gegeben ist die folgende Aufgabe für  $u(x, y, t)$ .

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + u_{yy}, & x, y &\in (0, \pi), t > 0, \\u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y &\in (0, \pi), t > 0, \\u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x &\in (0, \pi), t > 0, \\u(x, y, 0) &= \frac{1}{2} (\sin(2x) + \sin(x)) \sin(y) & \text{für } x, y &\in (0, \pi).\end{aligned}$$

a) Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes  $u(x, y, t) = T(t) \cdot X(x) \cdot Y(y)$  für die Lösung der Differentialgleichung drei entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für  $X$ ,  $Y$  und  $T$  her.

b) Leiten Sie zunächst aus den Randwerten

$$\begin{aligned}u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y &\in [0, \pi], t > 0, \\u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x &\in [0, \pi], t > 0,\end{aligned}$$

Randbedingungen für die Lösungen der Differentialgleichungen für  $X$  und  $Y$  her, und lösen Sie die so erhaltenen gewöhnlichen Randwertaufgaben für  $X$  und  $Y$ .

Bestimmen Sie anschließend die passenden Funktionen  $T(t)$ .

c) Geben Sie eine Reihendarstellung der Lösung  $u$  der ursprünglichen Aufgabe an und nehmen Sie eine Anpassung an die Anfangswerte

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2} (\sin(2x) + \sin(x)) \sin(y) \quad \text{für } x, y \in [0, \pi]$$

vor.

Wie verhält sich die Lösung für  $t \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 2:** (Anschlagen einer Saite)

Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} & \text{für } 0 < x < 1, t > 0, \\u(0, t) &= u(1, t) = 0 & \text{für } t > 0, \\u(x, 0) &= 0 & \text{für } 0 < x < 1, \\u_t(x, 0) &= \begin{cases} 1, & \frac{1}{20} \leq x \leq \frac{1}{10}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}\end{aligned}$$

mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes.

Als Lösung erhalten Sie eine Fourierreihe. Plotten Sie die Partialsummen der ersten 20 nicht verschwindenden Summanden dieser Reihe für  $c = 2$ ,  $x \in [0, 1]$  und  $t \in [0, 0.4]$  bzw.  $t \in [0, 2]$ .

**Abgabe: 22-26.06.15**