

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 5, Präsenzaufgaben

#### Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösungen der Anfangsrandwertaufgaben

$$\begin{aligned}u_t - 4u_{xx} &= 0 & 0 < x < 1, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= x & 0 < x < 1 \\u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t > 0.\end{aligned}$$

bzw.:

$$\begin{aligned}u_t - 4u_{xx} &= 0 & 0 < x < 1, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 0 < x < 1 \\u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t > 0.\end{aligned}$$

Hinweis:  $2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ .

Wie lautet demnach die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t - 4u_{xx} &= 0 & 0 < x < 1, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 0 < x < 1 \\u(0, t) = u(1, t) &= 0 & t > 0.\end{aligned}$$

#### Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für  $u = u(x, t)$ :

$$\begin{aligned}u_t - 2u_{xx} &= -2xe^{-2t}, & x \in (0, 2), t > 0, \\u(x, 0) &= 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x), & x \in [0, 2], \\u(0, t) = \phi_1(t) &:= 1, \quad u(2, t) = \phi_2(t) := 2e^{-2t}, & t \geq 0.\end{aligned} \tag{1}$$

- a) Führen Sie eine Homogenisierung der Randwerte durch, indem Sie zum Beispiel eine Funktion  $v$  über

$$v(x, t) = u(x, t) - \phi_1(t) - \frac{x-a}{b-a}(\phi_2(t) - \phi_1(t)) \text{ hier } a = 0, b = 2$$

definieren und in der Aufgabenstellung die  $u$ -Ausdrücke durch geeignete  $v$ -Ausdrücke ersetzen. Man erhält z.B.

$$u_t = v_t + \dot{\phi}_1 + \frac{x-a}{b-a} \left( \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 \right).$$

- b) Lösen Sie die nach der Homogenisierung der Randdaten erhaltene Anfangsrandwertaufgabe und geben Sie die Lösung der ursprünglichen Anfangsrandwertaufgabe (1) an.

**Bearbeitung: 8-12.06.15**