

## Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 5, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:** (Abgewandelte Aufgabe aus Klausur 2005 Oberle/Kiani)

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für  $u = u(x, t)$ :

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= e^{-t} \sin(2x) + 1 & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \frac{1}{2} \sin(2x) & x \in (0, \pi), \\u(0, t) &= u(\pi, t) = t & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

a) Führen Sie eine Homogenisierung der Randwerte durch (vgl. Präsenzaufgabe 2).

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgaben:

(i)

$$\begin{aligned}v_t^* - v_{xx}^* &= 0 & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\v^*(x, 0) &= \frac{1}{2} \sin(2x) & x \in (0, \pi), \\v^*(0, t) &= v^*(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}v_t^{**} - v_{xx}^{**} &= e^{-t} \sin(2x) & x \in (0, \pi), t \in \mathbb{R}^+, \\v^{**}(x, 0) &= 0 & x \in (0, \pi), \\v^{**}(0, t) &= v^{**}(\pi, t) = 0 & t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

**Aufgabe 2:**

Gegeben ist das folgende Neumann Problem

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < 1, \\u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 & t > 0.\end{aligned}$$

- a) Leiten Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die in der Vorlesung (Folie 147) angegebene Reihendarstellung der Lösung

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 \pi^2 t} \cos(k\pi x).$$

her.

- b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit  $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$ .

**Abgabe bis: 26.06.15**