Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,2),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = g(x) := x^2 - 2x & x \in [0,2]\,, \\ u(x,1) = 0 & x \in [0,2]\,, \\ u(0,y) = 0 & y \in [0,1]\,, \\ u(2,y) = 0 & y \in [0,1]\,. \end{array}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle Rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweise: Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$ *.*
Rotationssymmetrisch heißt unabhänging von ϕ *(vgl. Folie 66-68 Vorlesung).*

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2+y^2 \le 9, \\ u(x,y) &= \frac{x}{9}\,(x-y) \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Hinweise: Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz! Die Lösung ist NICHT rotationssymmetrisch!

$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1,\ \sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)\,.$

Bearbeitung: 18-22.05.15