

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Sei K der Kreisringsektor $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 9\}$ und (r, φ) wie üblich die Polarkoordinatendarstellung von (x, y) .

Lösen Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } K \\ u &= \begin{cases} \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) & r = 3 \\ 0 & \text{auf dem Rest von } \partial K \end{cases} \end{aligned}$$

mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes, und berechnen Sie alle Extrema von u auf \overline{K} .

Hinweis: Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$

Aufgabe 2:

Lösen Sie das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && x \in (0, 2), y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= 2 - x + \sin(\pi x), \\ u(x, 1) &= 0, \\ u(0, y) &= 2 - 2y + 3 \sin(3\pi y), \\ u(2, y) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x, y) := a + bx + cy + dxy$ ein, die die Randwerte in den Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für $v(x, y) = u(x, y) - u_E(x, y)$.

Abgabe bis: 12.06.15