Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2015**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

b) Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Bestimmen Sie die Entropielösungen der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Was schließen Sie aus ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burger's Gleichung?

Aufgabe 2:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt pro Zeiteinheit t passieren.

Wir führen zusätzlich ein:

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

und verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit einführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \quad \text{(rote Ampel/ Stau etc.)} \end{cases}$$

d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

Abgabe bis: 24.05.15