

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Reiner Lauterbach

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2014

Inhalte der Vorlesung Differentialgleichungen II.

- 1 Beispiele partieller Differentialgleichungen.
- 2 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.
- 3 Skalare Erhaltungsgleichungen.
- 4 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.
- 5 Normalformen und korrekt gestellte Probleme.
- 6 Die Laplacegleichung.
- 7 Die Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung.
- 8 Die Wellengleichung.
- 9 Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen.
- 10 Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen.

Kapitel 1. Was sind Partielle Differentialgleichungen?

1.1 Allgemeine Notationen

Definition

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p} \right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** (PDGL) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})$.

Tritt eine der partiellen Ableitungen p -ter Ordnung $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ explizit auf, so spricht man von einer partiellen DGL der **Ordnung p** .

Typischerweise treten in Anwendungen (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen **erster und zweiter Ordnung** auf.

1.1 Allgemeine Notationen

Definition

- Eine PDGL heißt **linear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
- Eine PDGL heißt **semilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist **und** die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ abhängen.
- Eine PDGL heißt **quasilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}} \right)$ abhängen.
- In allen anderen Fällen ist die PDGL **nichtlinear**.

Beispiele.

- Eine skalare lineare PDGL 1. Ordnung in zwei Variablen ist

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = c(x, y)$$

- Eine skalare quasilineare PDGL 1. Ordnung in zwei Variablen ist

$$a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = g(x, y, u)$$

- Eine semilineares PDGL-System 2. Ordnung in n Variablen ist

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \mathbf{u}_{x_i x_j} = b(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{x_1}, \dots, \mathbf{u}_{x_n})$$

- Eine nichtlineare skalare PDGL 1. Ordnung in zwei Variablen ist

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y)$$

Eine Bemerkung zur allgemeinen Notation bei PDGL.

In Anwendungen treten typischerweise **Ortsvariablen** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (oft $n = 3$) sowie die **Zeitvariable** $t \in \mathbb{R}$ auf.

Wir betrachten dann die allgemeine PDGL der Form

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p} \right) = 0$$

in $(n+1)$ Variablen. Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \quad \text{div}, \quad \text{rot} \quad \text{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\text{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

1.2 Motivation: Wieso Partielle Differentialgleichungen?

Der Reynoldsche Transportsatz:

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.

Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung des Punktes $\mathbf{y} \in D_0$ in der Zeit,

$$\Phi : D_0 \times [0, T] \rightarrow D_t \subset \mathbb{R}^n,$$

sodass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}$$

Die **Trajektorie** von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung $t \rightarrow \Phi(\mathbf{y}, t) \in D_T$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} der physikalischen Größe.

Der Reynoldsche Transportsatz.

Satz

Für eine beliebige differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \right\}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

Beweisidee: Sei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\Phi(\mathbf{y}, t)$ bzgl. \mathbf{y} . Transformiere damit D_t auf D_0 :

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t .

Die Kontinuitätsgleichung.

Sei $u(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

Dann folgt aus dem Reynoldsschen Transportsatz

$$\int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div}(u\mathbf{v}) \right\}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(u\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0$$

Diese Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

Kontinuitätsgleichung und entsprechende Flussfunktion.

Schreibt man die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der **Flussfunktion** $q(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0,$$

so ergibt sich **eine** Gleichung für **zwei** unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Mathematische Modellierung:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \dots)$$

Einfachster Modellierungsansatz: Der Fluss \mathbf{q} ist proportional zur Dichte u

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot u(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit einem } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt die sogenannte **lineare Transportgleichung** oder auch **lineare Advektionsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0$$

Beispiel: Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung.

Die Dichte $u(x, t)$ beschreibe

- 1 die Konzentration eines chemischen Stoffes,
- 2 die Temperatur eines Körpers oder
- 3 ein elektrostatisches Potential.

Physikalische Modellierung: der Fluss \mathbf{q} ist **proportional zum Gradienten** der Dichte u , zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung,

$$\mathbf{q}(x, t) := -a\nabla u(x, t) \quad \text{für ein } a > 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(-a\nabla u(x, t)) = 0$$

und damit die PDGL

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = a\Delta u(x, t)$$

Fortsetzung des Beispiels.

Setzen wir $a = 1$, so erhalten wir die klassische **Wärmeleitungsgleichung** oder auch lineare **Diffusionsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(x, t)$$

Die Abschlussrelation

$$\mathbf{q}(x, t) = -a\nabla u(x, t) \quad \text{mit einem } a > 0$$

nennt man dabei entweder

- 1 das **Ficksche Gesetz** der Diffusion,
- 2 das **Fouriersche Gesetz** der Wärmeleitung oder
- 3 das **Ohmsche Gesetz** der elektrischen Ladung.

Beachte: Drei unterschiedliche physikalische Probleme liefern eine identische partielle Differentialgleichung.

Beispiel: Die Laplace- und Poissongleichung.

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t , i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

so erhält man die **Laplacegleichung**

$$\Delta u(x) = 0$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man **harmonische Funktionen**.

Die Gleichung

$$-\Delta u(x) = f$$

mit gegebener Funktion f , nennt man **Poissongleichung**.

Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential.

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDGL 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition

Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDGL

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = 0$$

Fazit:

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der homogenen linearen PDGL, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist,

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition

Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein **erstes Integral** des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Die Methode der Charakteristiken ist also nichts anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDGL auf gewöhnliche DGL's.

Beispiel.

Wir betrachten die PDGL in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$$

Das **charakteristische Differentialgleichungssystem** lautet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^t \\ y(t) &= c_2 e^t \\ z(t) &= \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2) e^{2t} + c_3\end{aligned}$$

Man nennt diese Lösungen auch die **charakteristischen Kurven**.

Fortsetzung des Beispiels.

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die **charakteristischen Kurven** erfüllen die Beziehungen

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven. Daraus folgt die **Lösungsdarstellung**

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen \mathcal{C}^1 -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen.

Die Methode der Charakteristiken lässt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen.

Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekanntenen Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen \mathbf{x} und u .

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Beweis der letzten Aussage.

Gilt $U_u \neq 0$, so lässt die Funktion $U(x, u)$ nach dem [Satz über implizite Funktionen](#) nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

und daraus folgt

$$- \left(\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} \right) U_u + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

Beispiel.

Gesucht ist die [allgemeine Lösung](#) der quasilinearen Gleichung

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1+x)U_x - (1+y)U_y + (y-x)U_u = 0$$

Das [charakteristische Differentialgleichungssystem](#) ist

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1+x \\ \dot{y} &= -(1+y) \\ \dot{u} &= y-x\end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^t - 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \Rightarrow (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \Rightarrow u + x + y = d \in \mathbb{R}$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungsdarstellung

$$\Phi\left((x+1)(y+1), u+x+y\right) = 0$$

mit einer beliebigen \mathcal{C}^1 -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition

Das auf ganz \mathbb{R}^n definierte **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy-Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die **Anfangsbedingung**

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Beispiel: Die Transportgleichung.

Ein typisches Beispiel ist die Transportgleichung aus Kapitel 1

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen. Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt \mathbf{x}_0 durchlaufen und in Richtung \mathbf{a} laufen.

Fortsetzung des Beispiels.

Möchte man die Lösung an einem Punkt (\mathbf{x}, t) bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert \mathbf{x}_0 zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe: Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a} \cdot \nabla u_0, \quad \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

Beispiel.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die **charakteristische Gleichung** lautet

$$\dot{x} = tx, \quad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Daraus folgt die **Lösung** des Anfangswertproblems

$$u(x, t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]$$

Problem: Lösungen existieren nur lokal in der Zeit.

Wir kehren zu dem anfangs definierten **Cauchy-Problem** zurück,

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Das **charakteristische System** lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u)$$

$$\dot{u} = b(\mathbf{x}, t, u)$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein **nichtlineares Differentialgleichungssystem**, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt.

Im Allgemeinen erhalten wir nur **lokale Lösungen** in der Zeit.

Nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen.

Eine wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die **nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichungen** in einer Raumdimension.

Das zugehörige **Cauchy–Problem** lautet

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die **Flussfunktion**.

Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDGL ist

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$.

Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die **lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

Die Burgers Gleichung.

Die **Burgers Gleichung** (Johannes Martinus Burgers, 1895–1981, niederländischer Physiker) ist eine Erhaltungsgleichung mit Flussfunktion $f(u) = u^2/2$ und das zugehörige Cauchy–Problem lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Wir wählen die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1-x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

und verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0$$

Die Burgers Gleichung: Charakteristische Kurven.

Da die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ **konstant** bleibt, gilt

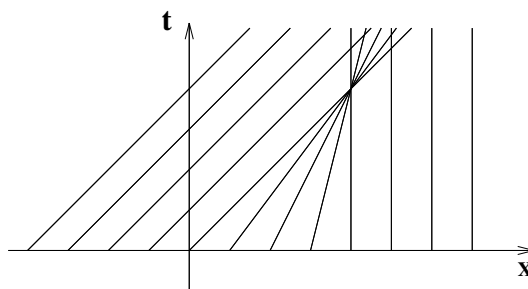
$$\dot{x} = u_0(x_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + tu_0(x_0)$$

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs!

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : x_0 \leq 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & : 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der **charakteristischen Kurven**



Die Burgers Gleichung: Singularität der Lösung.

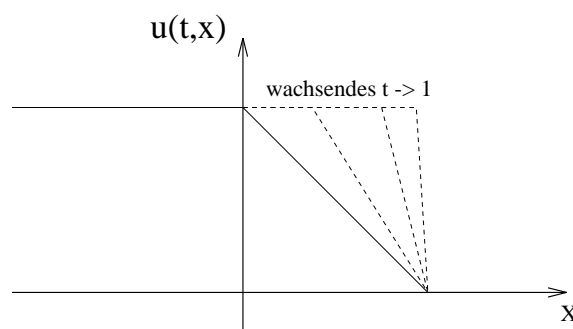
Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig.

In der Tat existiert die **klassische** Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur **lokal** in der Zeit für $0 \leq t < 1$.

Für $t \in [0, 1)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0, 1)$:



2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat im Allgemeinen **keine globale** Lösung.

Die **Burgers Gleichung** aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1-x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, 1)$ die klassische Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1-x)/(1-t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Frage: Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx = 0$$

Schwache Lösungen, Integrallösungen.

Definition

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine **Testfunktion**.

Definition

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine **Integrallösung** oder **schwache Lösung**, falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0) dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

Bemerkung

Eine Integrallösung muss **keine** differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen.

Riemannprobleme

Definition

Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein **Riemannproblem** für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel

Ein Riemannproblem für die **Burgers Gleichung** lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

Integrallösungen beim Riemannproblem.

- **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung.

Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte **Stoßwelle**

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq s(t) \\ u_r & : x > s(t) \end{cases}$$

eine Integrallösung.

Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.

Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist.

Diese Beziehung nennt man die **Rankine–Hugoniot Bedingung**.

Integrallösungen beim Riemannproblem.

- **Verdünnungswelle** bei der Burgers Gleichung.

Für $u_l < u_r$ ist die sogenannte **Verdünnungswelle** eine Integrallösung

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq u_l t \\ \frac{x}{t} & : u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r & : x \geq u_r t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x, t)$ eine **stetige** Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l t$ und $x = u_r t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung

Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Beschreibung der Stoßwellenlösung.

Definition

Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte **Stoßfront** $x = s(t)$, $s \in \mathcal{C}^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die **Stoßgeschwindigkeit**.

Satz

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit \dot{s} die **Rankine–Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}.$$

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung.

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi, t) d\xi = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi, t) d\xi \right) = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))$$

Da $u(x, t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

Fortsetzung der Herleitung.

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1, t)), \quad f_2 := f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \rightarrow s(t)^-$ und $x_2 \rightarrow s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s} u(s(t)^-, t) - \dot{s} u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+))$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}$$

Beispiel.

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.

Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \\ u_r & : x > \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \end{cases}$$

Beschreibung der Verdünnungswelle.

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, die Flussfunktion sei also **strikt konvex**.

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}$$

Beschreibung der Verdünnungswelle.

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r)$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω , der nicht durchlaufen wird,

$$\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Beschreibung der Verdünnungswelle.

Satz

Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** gegeben durch

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Funktion in den beiden Punkten

$$x = f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)t$$

stetig ist. Es gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

Beschreibung der Verdünnungswelle.

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)t$ und $x > f'(u_r)t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$u_t = -\frac{x}{t^2}g'(x/t)$$

$$f(u)_x = f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2}g'(x/t)$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist.

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig!

Beispiel: Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Dann existieren zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & : x \leq t/2 \\ 1 & : x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x/t & : 0 \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung ist eine **Stoßwelle**, die zweite eine **Verdünnungswelle**.

Frage: Welche der beiden Lösungen ist die physikalisch richtige?

Entropiebedingung und Entropielösungen.

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung aussucht.

Definition

Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$\exists C > 0$, sodass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z$$

Satz

Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

In unserem letzten Beispiel erfüllt die Verdünnungswelle die obige

Definition

Eine lineare PDGL 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDGL. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Spezialfall: Gilt $a_{ij} = \text{const.}$, $i, j = 1, \dots, n$, so lässt sich die PDGL auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

3.1 Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung in Matrixschreibweise

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Lineare Algebra: [Hauptachsentransformation](#)

Satz

Jede reelle, symmetrische Matrix \mathbf{A} ist [diagonalisierbar](#). Weiterhin gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

wobei \mathbf{S} als eine [orthogonale](#) Matrix gewählt werden kann.

Erinnerung: Eine reelle Matrix \mathbf{S} ist [orthogonal](#), falls gilt:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$$

Ansatz zur Herleitung von Normalformen.

Verwende die **Koordinatentransformation** $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$ und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\mathbf{y})$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

und wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}}$. Transponieren wir dies, so folgt

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T = (\mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}})^T = \nabla_{\mathbf{y}}^T \mathbf{S}^T$$

Diagonalform einer PDGL 2. Ordnung.

Ergebnis: Löst u die Gleichung $(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$, so erhalten wir für \tilde{u} die PDGL

$$(\nabla^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^T \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Definition

Gegeben sei die **partielle Differentialgleichung 2. Ordnung**

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Dann ist die zugehörige **Diagonalform** der PDGL gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D} \nabla) \tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}$ mit $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$ sowie

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}(\mathbf{S}\mathbf{y}), \quad \tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{S}\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{S}\mathbf{y}).$$

Ein Beispiel zu Diagonalformen.

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2)$$

Definieren wir den Vektor $\tilde{\mathbf{p}}$ als

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}}$$

mit einer orthogonalen Matrix \mathbf{S} , so lautet die Diagonalform

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Beachte: Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** sind aber stets die **Eigenwerte** von \mathbf{A} .

Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Definition

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

- Sind sämtliche Eigenwerte von \mathbf{A} von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch**.
- Sind alle Eigenwerte von \mathbf{A} ungleich Null, wobei $n - 1$ Eigenwerte gleiches und ein Eigenwert das andere Vorzeichen besitzen, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch**.
- Ist mindestens ein Eigenwert von \mathbf{A} gleich Null, so nennt man die Gleichung **parabolisch**.

Beispiel

Die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in **Diagonalform** heißt

- elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist;
- hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist;
- parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

Bemerkung.

Die Typeneinteilung lässt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** Koeffizientenmatrix **A** erweitern. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Die von dem Produkt xy abhängige Determinante von **A** ist

$$\det \mathbf{A} = xy - 1$$

Die PDGL ist also

- **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$;
- **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$;
- **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

Normalformen von PDGL 2. Ordnung.

Definition

- a) Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ist

$$-\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g.$$

- b) Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g.$$

- c) Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$-\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

3.2 Korrekt gestelltte Probleme

Definition

Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs- und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- 1 Existenz:** Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.
- 2 Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig.
- 3 Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den Anfangs- bzw. Randbedingungen ab.

Beispiel

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_t = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem.

Beispiel: Die eindimensionale Wellengleichung.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die **Formel von d'Alembert** gegeben

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x-t) + u_0(x+t) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\xi) d\xi$$

Sei nun $\tilde{u}(x, t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_0(x-t) - u_0(x-t) \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_0(x+t) - u_0(x+t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left(\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi) \right) d\xi \end{aligned}$$

Daraus folgt aber die **stetige Abhängigkeit** von den Daten

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + t \|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty$$

Beispiel: Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung.

Jacques Hadamard, 1865–1963, französischer Mathematiker.

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

ist ein **nicht korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x, y) = 0$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$u_0^n(x) = 0, \quad v_0^n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},$$

so ist die eindeutig bestimmte Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$$

Fortsetzung des Beispiels.

Nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n = u_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^n = v_0$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty \quad \text{für } y > 0,$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(x, y) \neq u(x, y)$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.

Beispiel: Randwertaufgabe für die Laplacegleichung.

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die

Poissonsche Integralformel

gegeben

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\|z\|=1} \frac{g(z)}{\|x - z\|^2} d\sigma$$

und hängt **stetig** von den Randdaten $g(x, y)$ auf dem Rand $x^2 + y^2 = 1$ ab.

Kapitel 4. Die Laplacegleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0$$

für $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und der zugehörigen Poissongleichung

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition

Eine \mathcal{C}^2 -Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$\Delta u = 0,$$

nennt man eine **harmonische Funktion**.

Bedeutung:

- 1 Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzipien etc.;
- 2 Komplexe Funktionen: analytische Funktionen, Satz von Liouville etc.

Kapitel 4. Die Laplacegleichung

4.1 Die Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine **explizite Lösung** der Laplacegleichung zu berechnen, mit Hilfe der wir weitere Lösungsdarstellungen ableiten können.

Beobachtung: Der Laplaceoperator Δ ist **invariant gegenüber Rotationen** in \mathbb{R}^n

Lösungsansatz: Wir suchen eine Funktion $u(\mathbf{x})$, die nur vom Abstand $\|\mathbf{x}\|$ zum Ursprung abhängt.

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Man rechnet leicht nach

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \dots, n$

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

4.1 Die Fundamentallösung

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich **die gewöhnliche Differentialgleichung**

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0$$

Setzen wir $w = v' \neq 0$, so löst w die **lineare Differentialgleichung**

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

Die **allgemeine Lösung** dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

Die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung in der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c .

Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|\mathbf{x}\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

definiert für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq 0$, nennt man die **Fundamentallösung der Laplacegleichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n .

Eine Anwendung: Lösungsformel für die Poissongleichung.

Bemerkung: Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$ eine **harmonische** Funktion.

Beispiel

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\text{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und somit ist die **Fundamentallösung** gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$$

Satz

Eine Lösung der **Poissongleichung**

$$-\Delta u = f$$

auf dem **Ganzraum** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft: Der Funktionswert einer harmonischen Funktion an einem Punkt \mathbf{x} ist stets gleich dem **Mittelwert** von u über eine Kugel mit Mittelpunkt \mathbf{x} bzw. der zugehörigen Sphäre um \mathbf{x} . Genauer gilt:

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in \mathcal{C}^2(U)$ harmonisch in U , so gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS = \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$.

Notation: Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\int \cdots = \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots$$

Beweis der Mittelwerteigenschaft.

Für ein festes $\mathbf{x} \in U$ definieren wir die Funktion $\phi(r)$ mittels

$$\phi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z})$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0,1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0 \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises.

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u d\mathbf{y} &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{x}, s)} u dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} ds = \alpha(n)r^n u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u d\mathbf{y}$$

Umkehrung der Mittelwerteigenschaft.

Satz

Für die Funktion $u \in \mathcal{C}^2(U)$ gelte für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittleigenschaft**

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u dS.$$

Daraus folgt, dass u auf U **harmonisch** ist.

Beweis: Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass

$$\Delta u > 0 \quad \text{oder} \quad \Delta u < 0$$

innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt.

Wir wissen aber, dass

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

Dies liefert einen Widerspruch, also ist u harmonisch auf U .

Das Maximumprinzip harmonischer Funktionen.

Satz

Sei $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$ harmonisch in U . Dann gilt:

1) *Das Maximumprinzip*

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{U}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial U} u(\mathbf{x})$$

2) *Das starke Maximumprinzip*

Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in U$ mit

$$u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \bar{U}} u(\mathbf{x})$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweisidee: Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen.

Eine wichtige **Anwendung** des Maximumsprinzips bei partiellen Differentialgleichungen: Lösungen von elliptischen Randwertaufgaben sind eindeutig.

Eine Anwendung: Elliptische Randwertaufgaben.

Satz

Sei $g \in \mathcal{C}(\partial U)$, $f \in \mathcal{C}(U)$. Dann existiert **höchstens eine** Lösung $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 = u_2$.

Weitere Aussagen zur Mittelwerteigenschaft und dem Maximumprinzip.

Es gelten die folgenden Aussagen.

- Erfüllt eine stetige Funktion $u \in \mathcal{C}(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.
- **Satz von Liouville**
Ist die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf \mathbb{R}^n und beschränkt, so ist u auf ganz \mathbb{R}^n konstant.
- **Beschränkte Lösungen der Poissongleichung**
Sei $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C .

Kapitel 4. Die Laplacegleichung

4.3 Die Greensche Funktion

Definition

a) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Dirichlet-Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

b) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Neumann-Problem** der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

Hierbei bezeichnet n die äußere Normale an ∂U .

4.3 Die Greensche Funktion

Proposition

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine beliebige Funktion. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Dabei ist die Funktion Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung. Man kann also jeden Funktionswert $u(\mathbf{x})$ bestimmen, wenn man die Werte von Δu in U sowie u und $\partial u / \partial \mathbf{n}$ entlang des Randes ∂U kennt.

Man beweist den Satz mit Hilfe der Greenschen Formeln aus Analysis III.

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace- und Poissongleichung: Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.

Definition der Greenschen Funktion.

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ für festes $\mathbf{x} \in U$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in } U \\ \Phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$$

und definiert für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Satz

Sei $u \in \mathcal{C}^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poissongleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.

Beweis des Satzes.

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim **Dirichlet-Problem** die Randdaten von $\partial u / \partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

Nach den **Greenschen Formeln** gilt aber

$$- \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

Fortsetzung des Beweises.

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ folgt

$$\int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ = \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} dS(\mathbf{y}) \\ + \int_U \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Eigenschaften der Greenschen Funktion.

Die **Greensche Funktion** erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- Die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in \mathbf{y} ;
- weiterhin erfüllt $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ homogene Randbedingungen, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U;$$

- die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt;
- die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Auf "einfachen" Gebieten lässt sich die Greensche Funktion elementar berechnen.

1 Für den Halbraum

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid x_n > 0\}$$

2 oder für die Einheitskugel $B(0, 1)$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum \mathbb{R}_+^n .

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \mid x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ definieren wir die **Spiegelung** an der Ebene $\partial \mathbb{R}_+^n$ mittels

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

und verwenden dann für die Funktion $\Phi^x = \Phi^x(\mathbf{y})$ den **Ansatz**

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n)$$

definiert für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum \mathbb{R}_+^n .

Da der Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ nicht in \mathbb{R}_+^n liegt, ist $\Phi^{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ auf dem **ganzem** Halbraum \mathbb{R}_+^n harmonisch.

Weiterhin gilt auf dem Rand

$$\begin{aligned}\Phi^{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) \\ &= \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ abhängt.

Also löst die Funktion $\Phi^{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{\tilde{\mathbf{x}}} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^{\tilde{\mathbf{x}}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \mid y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum \mathbb{R}_+^n lautet demnach

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \text{ mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Der Poissonkern für den Halbraum \mathbb{R}_+^n .

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n} - \frac{y_n + x_n}{\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\|^n} \right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n}$$

Definition

Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \text{ und } \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$$

nennt man auch den **Poissonkern** von \mathbb{R}_+^n .

Das Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung auf dem Halbraum \mathbb{R}_+^n .

Satz

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die *Poissonsche Integralformel*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} d\mathbf{y}$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist.

Die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nennt man den Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

den *dualen Punkt* von \mathbf{x} bezüglich $\partial B(0,1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in } B^0(0,1) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{y}\| < 1\} \\ \Phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \Phi(\|\mathbf{x}\|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

und wir erhalten folgende *Greensche Funktion* für die Einheitskugel

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\|\mathbf{x}\|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0,1) \text{ mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Das Dirichlet–Problem auf $B(0, 1)$.

Satz

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid \|\mathbf{x}\| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die *Poissonsche Integralformel*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{n\alpha(n)} \int_{\|\mathbf{y}\|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} dS(\mathbf{y}).$$

Der *Poissonkern* für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} \quad \text{für } \|\mathbf{x}\| < 1 \text{ und } \|\mathbf{y}\| = 1$$

Bemerkung

Mit der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$ ableiten.

Kapitel 5. Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel suchen wir Lösungen der *Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung*

$$u_t = \Delta u$$

Dabei bezeichnet $t \geq 0$ die *Zeitvariable* und $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die *Ortsvariable*. Insbesondere untersuchen wir Anfangs- oder Anfangs–Randwertprobleme der folgenden Form.

- 1 Das *Anfangswertproblem* oder auch Cauchy–Problem auf $U = \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- 2 Das *Anfangs–Randwertproblem* auf einem beschränkten Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } U_T := U \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T \end{cases}$$

5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = a(t), u(\pi, t) = b(t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Wir suchen eine Lösung mit Hilfe des **Produktansatzes**

$$u(x, t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad \text{für } p(x) \neq 0 \text{ und } q(t) \neq 0$$

5.1 Lösungen mittels Produktansätzen

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad (p(x) \neq 0, q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const.} =: -\delta$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0 \quad \text{und} \quad p''(x) + \delta p(x) = 0$$

Lösungen mittels Produktansätzen.

Die **allgemeine Lösung** der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0 e^{-\delta t}$$

Die **Lösung** der Gleichung $p''(x) + \delta p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten δ ab.

1 Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2$$

2 Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|x}} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|x}}$$

3 Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)$$

Lösungen mittels Produktansätzen.

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen.

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2)$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|x}} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|x}})$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))$$

Die vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = a(t), \quad u(\pi, t) = b(t)$$

Fazit: Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann gegebene Anfangs- und Randdaten $u_0(x), a(t)$ und $b(t)$ im Allgemeinen **nicht** beschreiben.

Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs- und Randbedingungen eine explizite Lösung.

Ein Beispiel zum Produktansatz.

Beispiel

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \sin x & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Aufgrund der *vorgegebenen Randbedingungen* fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x))$$

Wegen der Vorgabe $u(x, 0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!

Das Superpositionsprinzip.

Jede Lösung der Form

$$u(x, t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt die *homogenen* Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

Eine *Überlagerung*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Für eine gegebene Anfangsbedingung $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Entwicklung in eine *Fourier–Reihe*, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

5.2 Die Fundamentallösung

Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}} & : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung**. Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1.$$

Bemerkung

Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität.

Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich eine Lösung für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

angeben.

Lösung des Cauchy–Problems.

Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

Zur **Herleitung** der Fundamentallösung für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$:

Ist $u(\mathbf{x}, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda \mathbf{x}, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Herleitung der Fundamentallösung für $x \in \mathbb{R}$.

Ist $u(x, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Ansatz: Wir suchen daher eine **spezielle Lösung** in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

Man berechnet nun

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v'$$

$$u_x(x, t) = t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v'$$

$$u_{xx}(x, t) = t^{-3/2} \cdot v''$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0$$

Fortsetzung der Herleitung.

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v' + v'' = 0$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v'(r) = 0$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Weitere Lösungsdarstellungen mit Hilfe der Fundamentallösung.

Satz

Das *inhomogene* Anfangswertproblem mit *homogenen* Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds. \end{aligned}$$

Mit dem *Duhamel'schen Prinzip* lässt sich dann auch eine Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems mit allgemeinen Anfangsbedingungen angeben.

Das Duhamel'sche Prinzip.

Satz

Die Funktion

$$u(\mathbf{x}, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$$

löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der *inhomogenen* Gleichung durch Integration über s

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds$$

Das *inhomogene* Anfangswertproblem mit *allgemeinen Anfangsbedingungen* $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ besitzt daher die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

5.3 Eigenschaften von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung [Mittelwertformeln](#), die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$U_T := U \times (0, T]$$

den [parabolischen Zylinder](#) und

$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$$

den [parabolischen Rand](#).

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}$$

Die Mittelwerteigenschaft bei der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkung

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.
- Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch [Wärmekugel](#) – im Englischen [heat ball](#).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende [Mittelwerteigenschaft](#).

Satz

Ist $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_T$.

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man wie bei der Laplacegleichung [Maximumprinzipien](#) herleiten.

Maximumprinzipien bei der Wärmeleitungsgleichung.

Satz

Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T . Dann gilt

- 1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem **parabolischen Rand**, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

- 2) Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \bar{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf \bar{U}_{t_0} **konstant** ist.

Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Satz

Das Anfangsrandwertproblem auf dem beschränkten Gebiet U

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen f und g besitzt **maximal** eine Lösung u in $\mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\bar{U}_T)$.

Beweis: Sind u und \tilde{u} zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ **identisch** verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Das Anfangswertproblem auf dem Ganzraum \mathbb{R}^n .

Satz

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem Ganzraum \mathbb{R}^n mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der **zusätzlichen Wachstumsbedingung** *-2mm

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{mit } A, a > 0$$

maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Beispiel

In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy–Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Kapitel 6. Die Wellengleichung

In diesem Kapitel berechnen wir Lösungen der **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie der **inhomogene Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ wiederum die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**.

Wir suchen also eine Funktion $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite $f = f(\mathbf{x}, t)$ eine gegebene Funktion $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Kapitel 6. Die Wellengleichung

6.1 Die Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Erste Beobachtung:

Die Differentialgleichung lässt auf folgende Weise faktorisieren.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t)$$

6.1 Die Formel von d'Alembert

so erhalten wir eine **Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten**

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x, t) = a(x - t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = a(x)$$

Wegen

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t)$$

ist $u(x, t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen** Transportgleichung

$$u_t - u_x = a(x - t)$$

Herleitung der Formel von d'Alembert.

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + u(x + t, 0) \\&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + u(x + t, 0) \\&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t)\end{aligned}$$

Diese Lösung soll nun noch die [Anfangsbedingung](#)

$$u_t(x, 0) = h(x)$$

erfüllen.

Man berechnet

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (a(x + t) + a(x - t)) + g'(x + t)$$

Fortsetzung der Herleitung.

Man berechnet

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (a(x + t) + a(x - t)) + g'(x + t)$$

und damit

$$u_t(x, 0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x)$$

Also folgt

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x + t) \\&= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) + g(x + t)\end{aligned}$$

Damit haben wir eine [explizite](#) Lösung der Wellengleichung berechnet.

Komplettierung der Lösungsformel von d'Alembert.

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy$$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert**.

Bemerkung

Damit diese Lösung $u(x, t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen die Bedingungen

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

fordern.

Ein Beispiel zur Formel von d'Alembert.

Beispiel

Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\sin(x+t) + \sin(x-t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t) \end{aligned}$$

Die Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$.

Wir betrachten das Anfangswertproblem auf dem Halbraum \mathbb{R}_+

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Frage: Können wir die Lösung des Halbraumproblems mit Hilfe der Lösung eines Ganzraumproblems berechnen?

Idee: Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d'Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & \text{für } x \geq 0, t \geq 0 \\ -u(-x, t) & \text{für } x \leq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

Fortsetzung der Reflektionsmethode.

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion \tilde{u} das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

Fortsetzung der Reflektionsmethode.

Für $x \geq 0$ gilt nach Definition gerade

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$$

In der Formel von d'Alembert ist aber eine **Fallunterscheidung** nötig.

Fallunterscheidung:

1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \end{aligned}$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und \tilde{g} beziehungsweise h und \tilde{h} überein.

Fortsetzung der Reflektionsmethode.

2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(-(x-t))) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) - \frac{1}{2} \int_0^{t-x} h(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} h(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy \end{aligned}$$

Komplettierung der Reflektionsmethode.

Gesamtlösung: Wir erhalten also als Lösung des **Ausgangsproblems**

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}(g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel

Die Lösung des **Anfangswertproblems**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t)).$$

Kapitel 6. Die Wellengleichung

6.2 Lösungen der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee: Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x, t)$ über die Sphäre $\partial B(x, r)$,

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y)$$

Lösungen durch sphärische Mittelung.

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x; r) := \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y) \\ H(x; r) := \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y) \end{cases}$$

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x; r, t)$ die **Euler–Poisson–Darboux Gleichung**

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Beweis: Einer früheren Beobachtung folgend (siehe Seite 66 des Skripts) gilt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy$$

Fortsetzung des Beweises.

Da u eine Lösung der **Wellengleichung** ist, folgt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} u_{tt}(y, t) dy$$

und damit

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x, r)} u_{tt} dy$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1} U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x, r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \int_{\partial B(x, r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die **EPD–Gleichung**

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0.$$

Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$.

Satz

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in **drei Dimensionen** lautet

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y)$$

mit $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$.

Beweis: Die **Herleitung** erfolgt über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung. Wir definieren zunächst

$$\tilde{U} := rU$$

$$\tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Fortsetzung des Beweises.

Also löst \tilde{U} das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das **Halbraumproblem** folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r) \right] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch **sphärische Mittelung** entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t)$$

Fortsetzung des Beweises.

Mit der Definition von \tilde{U} ergibt sich

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\&= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) \\&= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)\end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H , so erhält man

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (tG(x; t)) + tH(x; t) \\&= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x, t)} h dS\end{aligned}$$

Komplettierung des Beweises.

Nun gilt

$$\int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) = \int_{\partial B(0, 1)} g(x + tz) dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\partial B(x, t)} g dS \right) &= \int_{\partial B(0, 1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) \\&= \int_{\partial B(x, t)} Dg(y) \cdot \left(\frac{y-x}{t} \right) dS(y)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten wir – nach **Umsortierung** – die Kirchhoffsche Formel.

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_{\partial B(x, t)} t Dg(y) \cdot \left(\frac{y-x}{t} \right) dS(y) + \int_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y) \\&\quad + \int_{\partial B(x, t)} t h dS(y)\end{aligned}$$

Die Poissonsche Formel für $n = 2$.

Satz

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in **zwei Dimensionen** lautet:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Beweisidee: Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das **dreidimensionale Anfangswertproblem** und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung **nicht** von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung: Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, d.h. unter Verwendung der Euler–Poisson–Darboux Gleichung und geeigneten Definition von \tilde{U} , lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im \mathbb{R}^n ableiten.

Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

7.1. Beispiel: Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$-T \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x) \quad \text{für } 0 < x < l$$

$$u(0) = 0$$

$$u(l) = 0$$

Anwendung: Die Lösung $u(x)$ beschreibt die **Gleichgewichtslage** eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten c_1, \dots, c_N .

Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Damit sind die homogenen Randbedingungen für **beliebige** Lösungskoeffizienten $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen diese Koeffizienten so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^N \frac{Tn^2\pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Für die Koeffizienten b_1, \dots, b_N gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}, \quad n = 1, \dots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$ und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2} \sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2} \sin(3\pi x).$$

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Der allgemeine Fall: Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier–Reihe** $f_N(x)$

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit den **Fourier–Koeffizienten**

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{für } n = 1, \dots, N$$

Siehe Analysis II: Fourier–Reihen in Kapitel 10

Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Beispiel

Wir betrachten das Randwertproblem

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = x, \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 0$$

*Die exakte Lösung lässt sich durch **Integration** berechnen*

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2).$$

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Wir berechnen nun zunächst die Fourier–Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x$$

also

$$c_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \dots, N$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x)$$

Zum Beispiel erhalten wir

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3} \sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3} \sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3} \sin(4\pi x)$$

Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGL's

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne dazu die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1-x^2)$$

Mit der Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\pi x)$$

erhalten wir für die Fourier–Koeffizienten die Darstellung

$$a_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x^2) \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3}$$

Dies sind aber gerade die Fourier–Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

7.2. Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Bemerkung

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen *automatisch* erfüllt.

7.2. Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Für die **Koeffizienten** der Fourier–Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Gleichzeitig können wir die **Inhomogenität** $f(x, t)$ in einer Fourier–Reihe darstellen

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit

$$c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Wir berechnen nun die **Orts– und Zeitableitungen** des Lösungsansatzes

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung.

Die Berechnung der **Orts– und Zeitableitungen** ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung.

Durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x, t)$ erhalten wir ein **System gewöhnlicher Differentialgleichungen** der Form

$$\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = c_n(t)$$

Die **Anfangsbedingungen** $a_1(0), a_2(0), \dots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

und daher

$$a_n(0) = b_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Damit erhalten wir ein **Anfangswertproblem** für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem **entkoppelt** ist.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung.

Die Lösung lässt sich also direkt angeben

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot (t-s)\right) c_n(s) ds.$$

Beispiel

Wir betrachten das *homogene Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = u(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Die Berechnung der *Fourier–Koeffizienten* von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Fortsetzung des Beispiels.

Beispiel (Fortsetzung)

Da wir eine *homogene Wärmeleitungsgleichung* betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als *Fourier–Reihe* lautet

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Beobachtung:

- Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung **exponentiell schnell** für $n \rightarrow \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die **höheren Frequenzen** in der Lösung.
- Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten **exponentiell schnell** für $t \rightarrow \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also **wenige Terme** der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Ein weiteres Beispiel.

Wir betrachten das **inhomogene** Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$b_n = 0$$
$$c_n(t) = c_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

und damit

$$a_n(t) = 2 \int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} ds = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t})$$

Allgemeinere Randbedingungen.

Bis jetzt haben wir nur Anfangsrandwertprobleme mit **homogenen** Randbedingungen betrachtet,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Was passiert bei

- 1 einseitig **Neumannschen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0,$$

- 2 **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t)$$

Fourier–Methoden bei Neumannschen Randbedingungen.

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Bemerkung

Beschreibt die Funktion $u(x, t)$ eine orts- und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

- 1 die Bedingung $u(0, t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0, l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,
- 2 die Bedingung $u_x(l, t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluss nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist **perfekt wärmeisoliert**.

Fourier–Methoden bei Neumannschen Randbedingungen.

Die Fourier–Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Anderer Ansatz: die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

erfüllt.

Fourier–Methoden bei Neumannschen Randbedingungen.

Diese Funktion beschreibt gerade eine **Viertel–Sinuswelle**.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran Vielfache einer **halben Sinuswelle** anhängen, also

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

Die Funktionen **höherer Frequenzen** sind dann von der Form

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2$$

Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

Beispiel.

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Die Berechnung der **Fourier–Koeffizienten** von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25|\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right) dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2}\sin(n\pi/2) + \sqrt{2}\cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2} \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und **Koeffizientenvergleich** mit der Fourier-Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n = 0$$

$$a_n(0) = b_n$$

für $n = 1, 2, \dots$

Die **Lösung** dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t}$$

Beidseitige Neumann-Randbedingungen.

Sind **beide Enden** wärmeisoliert, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = f(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) : 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = 0 : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x, t) = 1 \quad \text{und} \quad u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Beispiel.

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Mit dem [Lösungsansatz](#)

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0$$

Fortsetzung des Beispiels.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0$$

Um die zugehörigen [Anfangsbedingungen](#) festzulegen, bestimmen wir die Fourier-Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x) dx$$
$$d_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$$

Komplettierung des Beispiels.

Man berechnet

$$d_0 = \frac{5}{2}$$

$$d_n = \frac{20(2 \cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2}$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \dots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{2500}$$

und die Lösung lautet

$$u(x, t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Fourier–Methoden bei periodischen Randbedingungen.

Wir kommen nun zu **periodischen** Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

Fourier–Methoden bei periodischen Randbedingungen.

Mit den Reihenentwicklungen

$$f(x, t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$g(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{da_0}{dt}(t) = c_0(t)$$

$$\frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} a_n(t) = c_n(t)$$

$$\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} b_n(t) = d_n(t)$$

Fourier–Methoden bei periodischen Randbedingungen.

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = \frac{1}{10} x(x^2 - \pi^2) & : -\pi < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 25 & : -\pi \leq x \leq \pi \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist die Fourier–Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5} \left(1 - e^{-n^2 t}\right) \sin(nx).$$

Kapitel 7: Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

7.3. Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Wir betrachten das [Anfangsrandwertproblem](#)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier–Reihen für $f(x, t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Beispiel.

Die Lösung des [Anfangsrandwertproblems](#)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegebenen Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x, 0) = h(x)$.

Kapitel 8: Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Zur numerischen Lösung gibt es **drei** klassische Ansätze:

1 Finite-Differenzen

Approximation auf regulären (strukturierten) Gittern, einfache Geometrien, häufig eindimensional im Ort, alle Typen

2 Finite-Volumen

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, vor allem hyperbolische Gleichungen

3 Finite-Elemente

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, komplizierte Geometrien, vor allem elliptische Gleichungen

Wir beschränken uns auf die Darstellung von **Finiten-Differenzen-** und **Finite-Element-Methoden**.

8.1 Die Methode der Finiten-Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme und die folgenden Anfangs- und Anfangsrandwertprobleme

1 Cauchy-Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**, also

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2 Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

3 Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**, also

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

8.1. Die Methode der Finiten–Differenzen

Idee bei Finiten–Differenzen: Approximiere die exakte Lösung **nur** an diskreten Punkten (**dem Gitter**):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i = i \cdot h, \quad i \in \mathcal{L}_x \quad \text{und} \quad t_j = j \cdot k, \quad j \in \mathcal{L}_t$$

und den **Orts– und Zeitschrittweiten** h und k . Die Indexmengen \mathcal{L}_x und \mathcal{L}_t sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von \mathcal{L} .

Beispiel

Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

$$t_j = j \cdot k, \quad j = 0, \dots, m$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten

$$h = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad k = \frac{T}{m}.$$

Zur diskreten Approximation von Ableitungen.

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen auf dem vorgegebenen Gitter.

Beispiel

Wir approximieren die Ableitung $u_x(x, t)$ an der Stelle $(x, t) = (x_i, t_j)$ durch

1 Zentrale Differenzen

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}$$

2 Vorwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}$$

3 Rückwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}$$

Zur Approximationsgüte von Finiten-Differenzen.

Sei $u(x, t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts- und Zeitschrittweite h und k .

Mittels einer **Taylorentwicklung** um (x_i, t_j) erhalten wir

$$\begin{aligned}u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \\ &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \dots \\ u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \\ &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \dots\end{aligned}$$

Zur Approximationsgüte von Finiten-Differenzen.

Wir erhalten damit

- 1** bei **Zentralen Differenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

⇒ Approximation **zweiter** Ordnung in h .

- 2** bei **Vorwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

- 3** bei **Rückwärtsdifferenzen**

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen.

Wir betrachten das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit den **Notationen** von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten–Differenzen gegeben durch

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j) \right)$$

mit den **Anfangsbedingungen**

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} u_0(x) dx$$

Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$.

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} \left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

$$U_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

Beobachtung: Funktioniert nicht, Verfahren ist **instabil**.

Finite-Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen.

Beispiel

Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind-Verfahren: Funktioniert unter der CFL-Bedingung $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h} (U_i^j - U_{i-1}^j)$$

Lax-Friedrichs-Verfahren: Funktioniert wie das Upwind-Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j).$$

Finite-Differenzen für die Poissongleichung.

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poissongleichung**, also

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der **zweiten Ableitung**.

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0$$

Finite–Differenzen für die Poissongleichung.

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (U_1, \dots, U_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fazit: Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten U_1, \dots, U_{n-1} .

Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung.

Zur numerischen Lösung von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

Einfachste Möglichkeit: Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz für die Zeitableitung an, also

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} (U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)$$

Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung.

Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

erhalten wir das **implizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die **θ -Methode**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2} \left[\theta(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta)(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) \right]$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das **Crank-Nicholson-Verfahren**.

Finite-Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkung

- Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung:

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Man nennt diese Bedingung eine **Stabilitätsbedingung**.

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muss man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil. Zur Berechnung der Lösung muss man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.
- Bei Verfahren sind **erster Ordnung in der Zeit** und **zweiter Ordnung im Ort**, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt:

$$e(T) = O(k) + O(h^2)$$

Bemerkung

- Die **Stabilitätsbedingung** für die θ –Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ –Methode stets stabil.

- Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, für den Fehler $e(T)$ gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2)$$

Für keinen anderen Wert von θ gibt es ein entsprechendes Resultat. Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

Kapitel 8: Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

8.1 Die Methode der Finiten–Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

Wesentlicher Unterschied zu Finiten–Differenzen:

Man diskretisiert **nicht** die gegebene partielle Differentialgleichung, sondern die **Lösung** der Gleichung und verwendet dabei drei Schritte.

- 1 Schwache Form oder Variationsformulierung,
- 2 Galerkin–Methode,
- 3 Approximation durch stückweise definierte Polynome.

Grundlegende Ideen der Methode.

- 1 Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- 2 Die **Galerkin-Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich-dimensionalen** Finite-Element-Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.
- 3 Als Basis des endlich-dimensionalen FE-Raums wählt man **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

Die schwache Form des Randwertproblems.

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form

Die schwache Form des Randwertproblems.

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen: Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und **wichtiger**, es gilt ebenfalls die **Umkehrung**.

Fazit: Beide Darstellungen sind also äquivalent.

Die Galerkin-Methode.

Definieren wir

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx$$

so ist $a(\cdot, \cdot)$ eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt, und mit dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

lässt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben.

Finde ein $u \in V$, sodass $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$ gilt

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich-dimensionalen Raum V_n , den sogenannten **Finite-Element-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

Finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$ gilt

Die Galerkin–Methode.

Das Problem

Finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$ gilt

lässt sich auf ein **lineares Gleichungssystem** reduzieren.

Sei dazu $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n . Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j$$

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt

$$a\left(\sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i\right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Die Galerkin–Methode.

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix** \mathbf{A} und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten u_1, \dots, u_n .

Zur Konstruktion von FE-Räumen.

- 1 Am besten wären FE-Räume V_n , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- 2 Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite **einfach** zu berechnen sein.
- 3 Die Basis von V_n sollte **fast** orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit **dünn besetzt**.
- 4 Die exakte Lösung u des Problems sollte **möglichst gut** durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sollte die Approximation **beliebig gut** werden.

Daher: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise **lineare** Funktion (Beispiel auf Folie).

Ende der Vorlesung.