

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$u_t - 4u_{xx} = 0 \quad 2 < x < 5, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x, 0) = x^2 - 7x + 10 \quad 2 \leq x \leq 5,$$

$$u(2, t) = u(5, t) = 0 \quad t > 0.$$

Hinweis: (7.11), (7.12) Vorlesungsfolien.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die folgende Aufgabe für $u(x, y, t)$.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy}, & x, y &\in (0, \pi), t > 0, \\ u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y &\in [0, \pi], t > 0, \\ u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x &\in [0, \pi], t > 0, \\ u(x, y, 0) &= 3 \sin(2x) \cdot \sin(3y) & \text{für } x, y &\in [0, \pi]. \end{aligned}$$

- a) Leiten Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(x, y, t) = T(t) \cdot X(x) \cdot Y(y)$ für die Lösung der Differentialgleichung drei entkoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für X , Y und T her.
- b) Leiten Sie zunächst aus den Randwerten

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u(\pi, y, t) = 0, & \text{für } y &\in [0, \pi], t > 0, \\ u(x, 0, t) &= u(x, \pi, t) = 0, & \text{für } x &\in [0, \pi], t > 0, \end{aligned}$$

Randbedingungen für die Lösungen der Differentialgleichungen für X und Y her, und lösen Sie die so erhaltenen gewöhnlichen Randwertaufgaben für X und Y .

Bestimmen Sie anschließend die passenden Funktionen $T(t)$.

- c) Geben Sie eine Reihendarstellung der Lösung u der ursprünglichen Aufgabe an und nehmen Sie eine Anpassung an die Anfangswerte

$$u(x, y, 0) = 3 \sin(2x) \cdot \sin(3y) \quad \text{für } x, y \in [0, \pi]$$

vor.

Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Abgabetermin: 18. bzw. 21.06.13