Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. H. J. Oberle, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) (i) Sei u eine im Kreis $x^2 + y^2 < 4$ harmonische Funktion mit

$$u(x,y) = 1 + x^2 - y^2; \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung ohne u selbst zu berechnen.
Hinweis: $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$.

(ii) Sei u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1 && |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x,y) &= 0 && |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \end{aligned}$$

und $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.
Zeigen Sie, dass $v(x,y)$ die Laplace-Gleichung löst, und bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$.

b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

tatsächlich (für $r \neq 0$) die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten ist. Zeigen Sie dazu, dass der Übergang zu kartesischen Koordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, und $v(x(r,\phi), y(r,\phi)) = u(r,\phi)$ zur Differentialgleichung $r^2(v_{xx} + v_{yy}) = 0$ führt.

Aufgabe 2: Lösen Sie das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && x, y \in]0,\pi[\,, \\ u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x), && x \in [0,\pi]\,, \\ u(x,\pi) &= 0, && x \in [0,\pi]\,, \\ u(0,y) &= 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y), && y \in [0,\pi]\,, \\ u(\pi,y) &= 0, && y \in [0,\pi]\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x,y) := a + bx + cy + dxy$ *ein, die die Randwerte in den Ecken* $(0,0)$, $(0,\pi)$, (π,π), $(\pi,0)$ *interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für* $v(x,y) = u(x,y) - u_E(x,y)$. *Es gilt* $\sin(3y) = 3\sin(y) - 4\sin^3(y)$.

Abgabetermine: 13.5.13-17.5.13