**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2012**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. K. Rothe

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 5

**Aufgabe 17:**

Für den Kreis sei das innere Neumannsche Randwertproblem gegeben:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für} \quad x^2 + y^2 < R^2\,, \\ \frac{\partial}{\partial r}\, u(R,\varphi) &= v_0(\varphi) && \text{für} \quad \varphi \in [0, 2\pi[\,. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass für die Existenz einer Lösung notwendig $\int\limits_0^{2\pi} v_0(\varphi) d\varphi = 0$ gelten muss und dass die Lösung die folgende Form besitzt

$$u(r,\varphi) \;=\; C \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)\right) r^k$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

b) Man berechne die Lösung für das Beispiel $R = 2$ und

$$v_0(\varphi) = 2 \sin\varphi \cos\varphi - 4\cos^3\varphi + 3\cos\varphi$$

zunächst in Polarkoordinaten und wandle diese dann anschließend um in kartesische Koordinaten.

**Aufgabe 18:**

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{2x+3} && \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

**Aufgabe 19:**

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \\
& && \qquad\; 0 < t \le T\,, \\
u(0,t) &= 0 && \text{für} \quad 0 \le t \le T \\
u(2,t) &= 0 && \\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le 2
\end{aligned}
$$

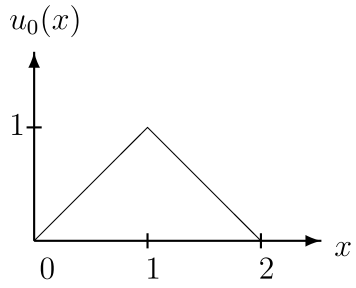


**Bild 19** Anfangsfunktion $u_0$

mit Hilfe eines Produktansatzes und bestimme den Maximalwert der Lösung $u$ im Gebiet $[0,2] \times [0,T]$.

**Aufgabe 20:**

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$
\begin{aligned}
u_t &= \Delta u && \text{für} \quad (x,y) \in\, ]0,1[ \times ]0,3[\,, \quad 0 < t\,, \\
u(0,y,t) &= 0 = u(1,y,t) && \text{für} \quad y \in [0,3]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,0,t) &= 0 = u(x,3,t) && \qquad\; x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\
u(x,y,0) &= (3\sin\pi x - \sin 3\pi x)\sin\pi y && \text{für} \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,3]\,.
\end{aligned}
$$

Man zeichen die Lösung $u$ für $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

**Abgabetermin:** 11.6.-15.6. (zu Beginn der Übung)