V6 Dgl II 14.7.10

zur Faltung:

Delta "Funktion"

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\, dx$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau = (\delta * f)(t)$$

$$F[\delta](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-ix\omega}\, dx = 1$$

Diff.op. (z.B. $y'' + a y' + b y$)

$$Ly = \delta$$

FT $\quad G(\omega)\, Y(\omega) = F[\delta](\omega) = 1$

$$Y(\omega) = \frac{1}{G(\omega)}$$

$$y(x) = F^{-1}[Y](x) = F^{-1}\left[\frac{1}{G(\omega)}\right](x)$$

Resultat für δ Rechte Seite!

$$Ly = f = \delta * f$$

$$Y(\omega) = \frac{F[\delta * f](\omega)}{G(\omega)} = \frac{F(\delta)\cdot F(f)(\omega)}{G(\omega)} = \frac{1}{G(\omega)} F(f)(\omega)$$

$$y(x) = F^{-1}\left[\frac{1}{G(\omega)} \cdot F[f]\right](x) =$$

$$= \left(F^{-1}\left[\frac{1}{G(\omega)}\right] * \underbrace{F^{-1}\big[F[f]\big]}_{f}\right)(x) =$$

$$= \left(\underbrace{F^{-1}\left[\frac{1}{G(\omega)}\right]}_{\text{"Delta Antwort"}} * f\right)(x)$$

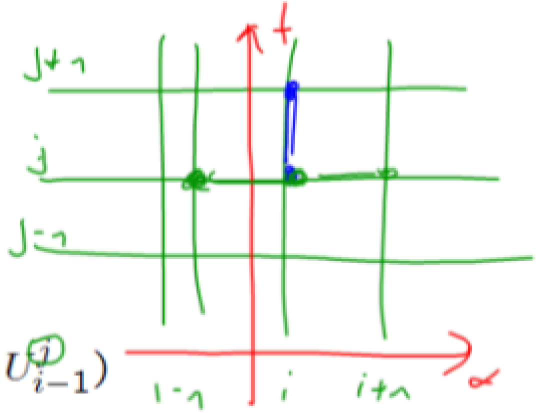
Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : \ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = g(x) & : \ 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & : \ 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzen-approximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also



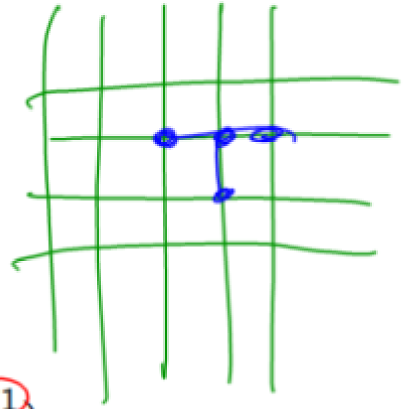
$$\underline{u_t(x_i,t_j)} = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}\underline{(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)}$$

$\circ \xrightarrow{\text{explizit}} \circ$

2) Mit der Rückwärtsdifferenz



$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

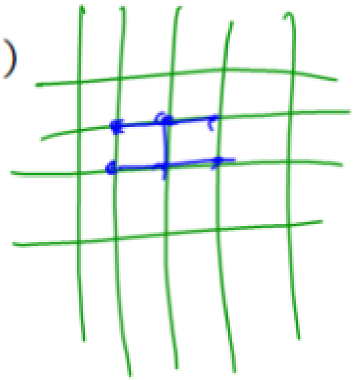
erhalten wir das **implizite Verfahren**

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1})$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die θ–Methode

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} &= U_i^j + \frac{k}{h^2}[\theta(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) \\ &\quad +(1-\theta)(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)] \end{aligned}$$



Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das **Crank–Nicholson–Verfahren**.

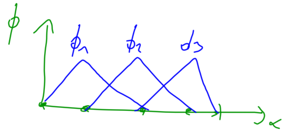
$$-\Delta u = f \quad \text{auf } U$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial U$$

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_U f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_0$$

Schwache Lsg — H_0: 0 RB. z.B. $C_0^1(\bar{U})$

F.E. Ersetze H_0 durch endl. Raum mit Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$

z.B.



$$u \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \underbrace{a(\phi_i, \phi_j)}_{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \phi_i$$

i.e. $\int \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j$ (i.a. Kompliziert)

$$\Rightarrow A u = b \leftarrow f$$

$a_{ij} = a_{ij}(\phi_i, \phi_j)$ → A

ges. Lsg. → u

Bspl. $a_{ij} = \begin{cases} c_i & i=j \\ c_{ij} & i=j\pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

In 2Dimension