V10 Dgl II 2.6.10

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$u = v + w$$

$$v_t = v_{xx}$$
$$v(0,t) = v(\pi,t) = \frac{1}{2}$$
$$v(x,0) = \frac{1}{2}$$

$$w_t = w_{xx}$$
$$w(0,t) = w(\pi,t) = -\frac{1}{2}$$
$$w(x,0) = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\sqrt{\lambda} = 2$$

$$v = \frac{1}{2}$$

$$w = -\frac{1}{2}e^{-4t}\cos 2x$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-4t}\cos 2x\right)}$$

u Lsg $u_t = u_{xx}$ $v(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ Lsg $v_t = v_{xx}$

$v_t = \lambda^2 u_t = \lambda^2 u_{xx} = v_{xx}$

Ansatz:

Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right)$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v' \\ u_x(x,t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v' \\ u_{xx}(x,t) &= t^{-3/2} \cdot v'' \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0 \quad / \, t^{\frac{3}{2}}$$

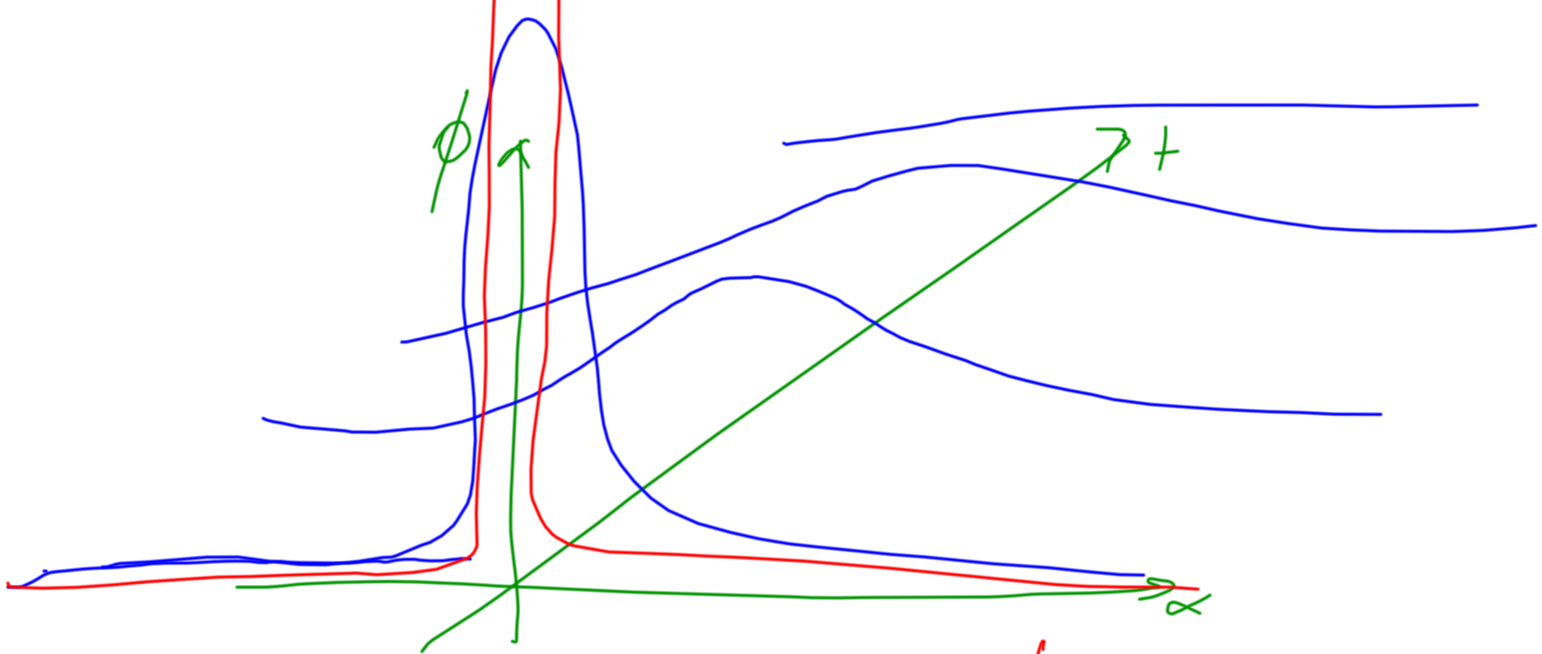
$$\frac{x}{t^2} t^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{\sqrt{t}} = \eta$$

98

$$\int_{\mathbb{R}} c\,\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{t}}\, dx \overset{!}{=} 1$$

$$t \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$



$$t \to 0$$

Mit Hilfe von $\Phi(x,t)$ lässt sich für das **Cauchy–Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x)$$

Herleitung der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):

Ist $u(x,t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\phi_t(x-y,t) - \Delta_x \phi(x-y,t)\right)}_{=0} g(y)\, dy = 0$$

1) **Duhamel'sches Prinzip:**

Die Funktion $u(\mathrm{x}, t; s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s) f(\mathrm{y}, s) d\mathrm{y}$ löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot\,;s) - \Delta u(\cdot\,;s) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot\,;s) &= \underline{f(\cdot\,;s)} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$U(\mathrm{x}, t) = \int\limits_0^t u(\mathrm{x}, t; s)\, ds$$

$$\boxed{\begin{aligned} U_t &= \Delta U + f \\ U(x,0) &= 0 \end{aligned}}$$

2) Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathrm{x}, 0) = g(\mathrm{x})$ besitzt die Lösung

$$u(\mathrm{x}, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t) g(\mathrm{y}) d\mathrm{y} + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s) f(\mathrm{y}, s) d\mathrm{y} ds$$

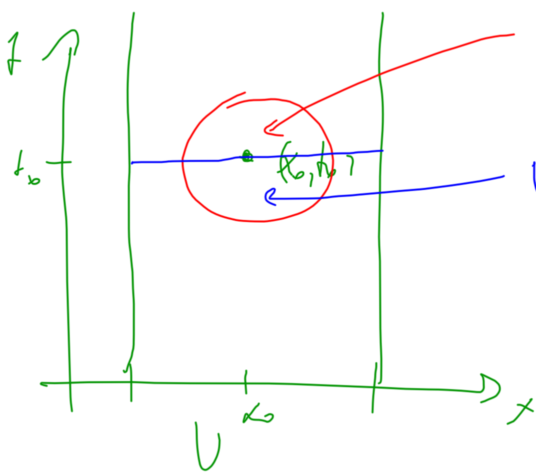
$$\boxed{U_t} = u(x,t;t) + \int_0^t u_t \ldots ds = u(x,t;t) + \int_0^t \Delta u \; ds = \boxed{\underbrace{u(x,t;t)}_{f(x,t)} + \Delta U}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_t &= \Delta v \\ v(x,0) &= \varphi \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} w_t &= \Delta w + f \\ w(x,0) &= 0 \end{aligned}}$$

$$u = v + w$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_t &= \Delta u + f \\ u(x,0) &= \varphi \end{aligned}}$$

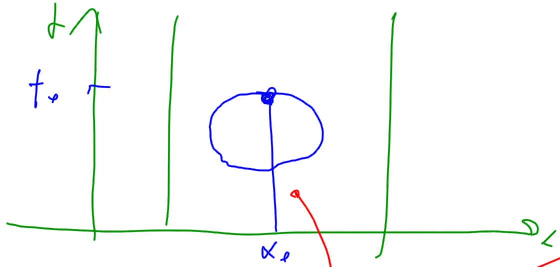
weil <u>linear</u>!!



Zukunft

Vergangenheit

So nicht!

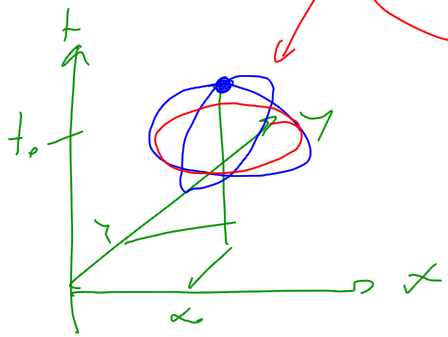


$|x-y|^2 \leq c(n,t)$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}} \geq \frac{1}{n}$$

$n=1$

auflösen!



Bemerkung:

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**:

Satz:

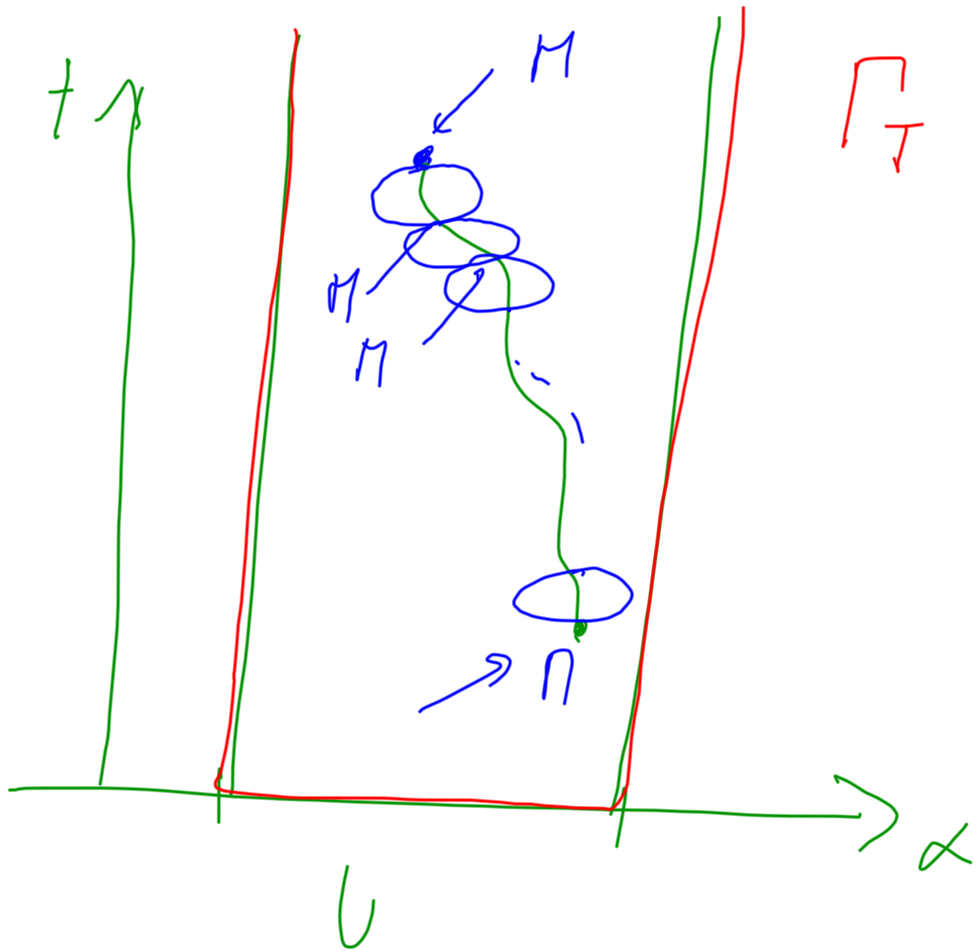
Ist $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x},t;r)} \underbrace{\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2}}_{\neq 1} u(\mathbf{y}, s)\, d\mathbf{y} ds$$

(Laplac gl.)

für jede Menge $E(x, t; r) \subset U_T$.

$u <$ $\quad \fint_{\partial E} \; \ldots$



t
M
M
M
n
Γ_T
U
x

Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

Satz:

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

AB + RB

auf dem beschränkten Gebiet U mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$w_t = \Delta w \quad U_T$
$w = 0 \quad \text{auf } \Gamma_T$

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ identisch verschwinden, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$.

Max Pri

$\underline{w \equiv 0} \Leftarrow \begin{cases} \max w \le 0 \\ \min w \le 0 \end{cases}$

105

Energie met.

$$u_t = \Delta u + f$$
$$u = g \qquad \Gamma_T$$

Satz: eindeutig

Bw, $w = u_1 - u_2$ erf. $\quad w_t = \Delta w$, $\quad w = 0 \quad \Gamma_T$

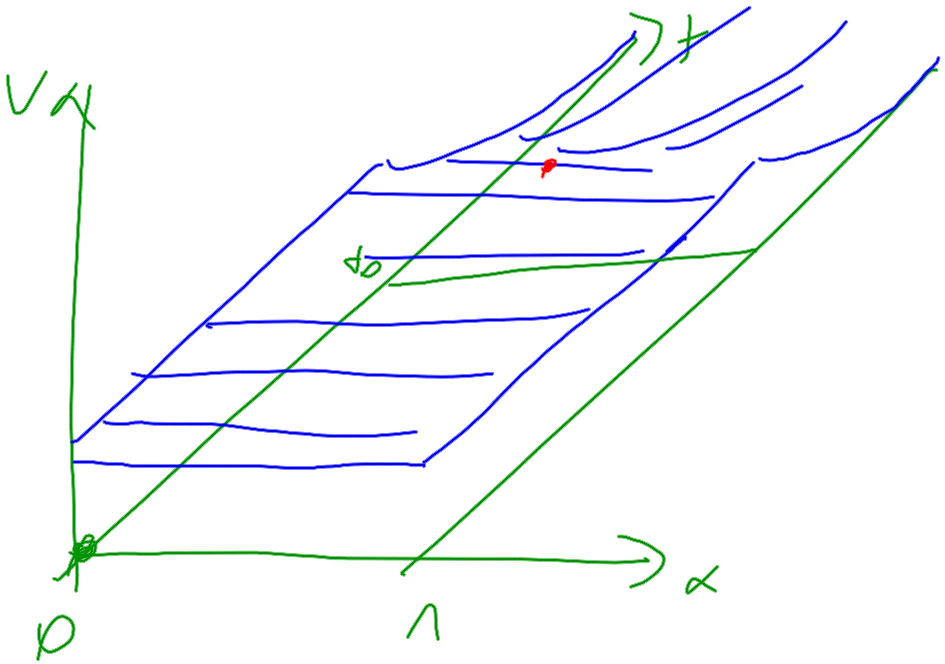
$$e(t) = \int_U w^2 \, dx$$

$$\dot{e}(t) = \int_U w w_t \, dx \overset{\text{wlge}}{=} \int_U w \Delta w \, dx = \cancel{\int_{\partial U} \underbrace{w}_{=0} \frac{\partial}{\partial n} w \, dS} - \int_U |Dw|^2 dx$$

$$= -\int_U |Dw|^2 dx \le 0$$

$$0 \le e(t) \underset{\dot{e} \le 0}{\le} e(0) = \int_U \underbrace{w^2(x,0)}_{=0} dx = 0$$

$$\Rightarrow e(t) \equiv 0 \Rightarrow w \equiv 0 \quad \#$$



v
t
x_0
0
1
α