Vo Dgl II 5.5.10

Ω $\partial\Omega$

F: Fluss

$$0 = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \, dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = -\int_{\Omega} \Delta u \, dx$$

stet. Gauss

z.B. Wärmeleitung $F = -\nabla u$

$\forall \Omega$
$\Rightarrow \Delta u = 0$

$n = 1$ $u_{xx} = 0$ $u(x) = ax + b$

$D = (0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a, b \text{ bestimmen!}$$

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$\sum_{i=1} x_i^2 = r^2$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

66

$$w' = -\frac{n-1}{r}w \qquad d\ln w = \frac{dw}{w} = -\frac{n-1}{r}dr =$$

$$= -(n-1)\, d\ln r$$

neine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$= d\ln\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right)$$

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

ı:

ion

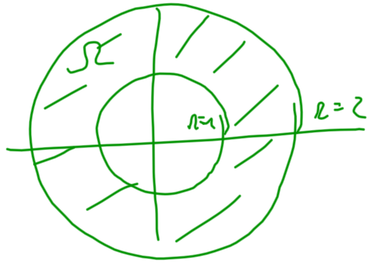
$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

ır $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, nennt man die **Fundamentallösung der leichung**. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. $\alpha(2) = \pi$, $\alpha(3) = \frac{4}{3}\pi$

$n=2$

$$\boxed{\Delta u = 0}$$

$$u(x) = v(r)$$



$$\boxed{\begin{aligned} u(r=1) &= 1 \\ u(r=2) &= 5 \end{aligned}}$$

$$v(r) = -b \ln r + C$$

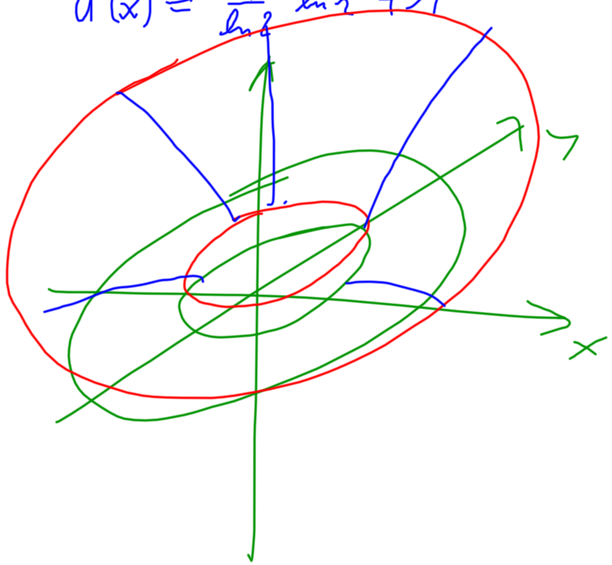
$$v(1) = C = 1$$

$$v(2) = -b \ln 2 + C = 5$$

$$C = 1$$

$$b = -\frac{4}{\ln 2}$$

$$u(x) = \frac{4}{\ln 2} \ln r + 1$$



lgerung aus dem Maximumprinzip:

ge Lösung der Randwertaufgabe

$g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in$ $\overline{U})$ des Randwertproblems

Keine Existenz !

nur Eindeutig (falls existent)

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } U \\ u &= g \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

d u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das
blem

$$-f+f = \begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } U \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial U \end{cases}$$

ximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

U und daher gilt $u_1 = u_2$.

bei bezeichnet n die äußere Normale an ∂U.

$$-u_{xx} = f \qquad u(0) = u_0 \qquad u(1) = u_1$$

$$u_x(0) = v_0 \qquad u_x(1) = v_1$$

$$\phi = \phi(x)$$

$$\Delta \phi = 0$$

$$\Delta_x \phi(x-y) = 0 \qquad \forall y \neq x$$

$$\Delta_x \phi(x-y_i) = 0 \qquad \forall x \neq x_i \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_x \phi(x-y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_x \phi(x-y_i) f(y_i) = 0$$

$$\Delta_x \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \phi(x-y_i) f(y_i)}_{\Downarrow} = 0$$

Vorsicht

$$\Delta_x \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y)\, dy}_{= u(x)} = f(x)$$

$n = 2 \qquad \phi(x) = c \ln r$

$$\int_{B(0,R)} \phi(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R \ln r \; r\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \underbrace{\int_0^R \ln r \; r\, dr}_{< \infty}$$

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u\, dS = \fint_{B(x,r)} u\, dy$$

ugel $B(x,r) \subset U$.

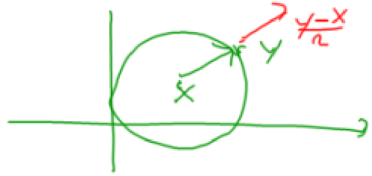
ungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\fint \ldots = \frac{1}{\text{vol}(B(x,r))} \int \ldots$$

$$\fint_{\partial B(x,r)} \cdot \, dS = \frac{1}{\text{vol}(\partial B(x,r))} \int dS$$

70

:



nieren für festes $\mathbf{x} \in U$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) \overset{*}{=} \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x}+r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z})$$

ilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(\overbrace{\mathbf{x}+r\mathbf{z}}^{y}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) = 1 \int_{\partial B(x,r)} F\cdot n\, dS \overset{\text{Gauss}}{=} 1 \int_{B(x,r)} \operatorname{div} F\, dx \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, dy = 0\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(x+w)\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u(x+rz)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$w \in \partial B(0,r)$ $\qquad$ $z \in \partial B(0,1)$

71

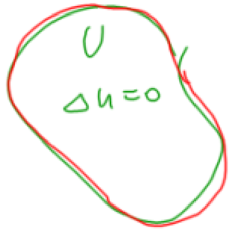
$$u(\mathrm{x}) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int\limits_{B(\mathrm{x},r)} u\, d\mathrm{y}$$

$$\int\limits_{B(x,r)} \cdot \, dx = \int_0^r \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cdot \; r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{\int_{\partial B(x,r)}} \, dr = \int_0^r \left(\int\limits_{\partial B(x,r)} dS \right) dr$$

72

ximumprinzip harmonischer Funktionen:

Sei $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ harmonisch in U. Dann gilt:



ximumprinzip

$$\max_{x \in \overline{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

rkes Maximumprinzip

U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit

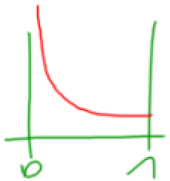
$$u(x_0) = \max_{x \in \overline{U}} u(x)$$

olgt, dass u auf U konstant ist.

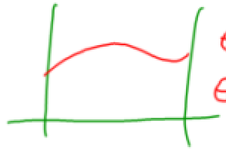
dee:

de auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funk-

$0,1)$



$C^2(0,1)$
$\notin C[0,1]$



$\in C^2(0,1)$
$\in C[0,1]$