

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13: (aus dem Vordiplom 15.02.05)

Man löse das folgende Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{für } 0 < x, y < 1, \\ u(0, y) &= y && \text{für } 0 \leq y \leq 1, \\ u(1, y) &= -y \\ u(x, 0) &= 0 && \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 1) &= 1 - 2x^2.\end{aligned}$$

Dazu gehe man wie folgt vor:

- Für die Funktion $w(x, y) = a + bx + cy + dxy$, die $\Delta w = 0$ erfüllt, bestimme man die unbekanntenen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass $w(0, y) = y$ und $w(1, y) = -y$ gilt.
- Man setze $v(x, y) := u(x, y) - w(x, y)$ und gebe das resultierende Randwertproblem für v an.
- Man löse das Problem in v , wobei die sich aus einem Produktansatz ergebenden Lösungsdarstellungen verwendet werden dürfen.

Aufgabe 14:

Man zeige:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx} + u_{yy} = 0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ folgende Darsstellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0.$$

Aufgabe 15: (aus dem Vordiplom 19.02.03)

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0,$$

$$u(2, \varphi) = \cos \varphi,$$

$$u(3, \varphi) = 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi).$$

Man berechne die Lösung.

Aufgabe 16:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreis

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < 5 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq r \leq 5,$$

$$u(5, \varphi) = \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u .

Abgabetermin: 1.6.- 3.6. (zu Beginn der Übung)