Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{tt} + 4u_{xt} + u_{xx} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

(i) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

(ii) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform.

(iii) Wie hängen die neuen Koordinaten von den alten Koordinaten t, x ab?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) \qquad 0 < x < \pi\,,\\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} \qquad t > 0,\\
u(\pi,t) &= 0 \qquad t > 0.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 1:

a)

$$u_{tt} + 4u_{xt} + u_{xx} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

(i) Aus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow det(A) = -3$$

folgt, dass es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung handelt.

(ii) Eigenwerte von A : $\quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$

Als Diagonalform erhält man also

$$3\tilde{u}_{\eta\eta} - \tilde{u}_{\psi\psi} = 0$$

(iii) Normierte Eigenvektoren von A:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätseigenschaft bzw. eine analoge Rechnung für λ_2 ergibt

$$(A - \lambda_2 I)w = 0 \Longrightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Transformationsmatrix und die neuen Koordinaten

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

also

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (t - x), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + x).$$

b)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \frac{x - \pi}{\pi\,(t+1)^2} \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) \qquad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) &= \frac{1}{t+1} \qquad t > 0, \\ u(\pi,t) &= 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Homogenisierung der Randdaten: Mit

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{1}{t+1} - \frac{x}{\pi}\left(0 - \frac{1}{t+1}\right) = u(x,t) - \frac{1}{t+1} + \frac{x}{\pi(t+1)}$$

ergibt sich die neue Aufgabe

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= u_t + \frac{1}{(t+1)^2}\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) - u_{xx} = \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + \frac{\pi - x}{\pi\,(t+1)^2} = 0 \\ v(x,0) &= u(x,0) - \frac{1}{0+1} + \frac{x}{\pi}\left(\frac{1}{0+1}\right) = \sin(6x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(0,t) &= u(0,t) - \frac{1}{t+1} = 0, \\ v(\pi,t) &= u(\pi,t) - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+1} = 0. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe mit homogener Differentialgleichung und homogenen Randwerten hat die Lösung

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{L} = 1,\ c = 1$$

mit

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \sin(6x)$$

also $a_6 = 1$ und $a_k = 0\ \forall k \neq 6$. Es folgt

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{t+1} - \frac{x}{\pi(t+1)} = e^{-36t} \sin(6x) - \frac{x-\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{t+1}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie eine Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq 1, \\ -1 & 1 < x. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_t + t^3 u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ &u(x,0) = e^{-(x-1)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, . \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Es entstehen zwei Stoßwellen

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 0 + \frac{u_l + u_m}{2}(t-0) = \frac{2+0}{2}t = t \\ s_2(t) &= 1 + \frac{u_r + u_m}{2}(t) = 1 + \frac{-1+0}{2}t = 1 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Diese stoßen für t^* mit $s_1(t^*) = s_2(t^*)$ zusammen.

$$t^* = 1 - \frac{t^*}{2} \Longrightarrow t^* = 2/3,\ s_1(t^*) = s_2(t^*) = 2/3$$

Im Punkt (2/3,2/3) entsteht eine neue Stoßwelle

$$s_3(t) = \frac{2}{3} + \frac{u_l + u_r}{2}(t - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3} + \frac{2-1}{2}(t - \frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{t}{2}$$

Für die Lösung erhält man also:

für $t \leq 2/3$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < t \\ 0 & t < x < 1 - \dfrac{t}{2} \\ -1 & 1 - \dfrac{t}{2} < x. \end{cases}$$

und für $t > 2/3$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{3} + \dfrac{t}{2} < x. \end{cases}$$

b)

$$u_t + t^3 u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = e^{-(x-1)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},.$$

Mit der Charakteristikenmethode erhält man

$$\frac{dx}{dt} = t^3 \implies x(t) = \frac{t^4}{4} + C \implies C = x - \frac{t^4}{4}$$

Auf den Charakteristiken ist die Lösung konstant. Es gilt

$$u(x,t) = f(C), \qquad \text{insbesondere} \qquad u(x,0) = f(C)$$

Für die vorgegebenen Anfangswerte also

$$u(x,0) = e^{-(x-1)^2} = f(x - \frac{0^4}{4}) = f(x)$$

Mit dieser Funktion f folgt aus $u(x,t) = f(C) = f(x - \frac{t^4}{4})$

$$f(x,t) = e^{-(x-\frac{t^4}{4}-1)^2}$$