Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier,
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6

Aufgabe 1: Lösen Sie die Anfangswertaufgaben

a) $u_{tt} = 9u_{xx}$ für $x, t \in \mathbb{R}^+$,
$u(x,0) = x\,\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$,
$u_t(x,0) = \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$,
$u(0,t) = 0$

b) $u_{tt} = 9u_{xx}$ für $x, t \in \mathbb{R}^+$,
$u(x,0) = \sin(x)\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$
$u_t(x,0) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}^+$,
$u(0,t) = 0$

mit Hilfe der Reflektionsmethode. Prüfen Sie, ob die errechneten Lösungen stetig partiell differenzierbar sind, und versuchen Sie das Ergebnis dieser Prüfung zu erklären.

Aufgabe 2: Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

mit

$$u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) = e^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Tip: Verwenden Sie die Faktorisierungsmethode aus Abschnitt 6.1. der Vorlesung.

Überzeugen Sie sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung von der Richtigkeit ihrer Lösung.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{u}(x,t) = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$

die inhomogene Anfangswertaufgabe $\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\cdot$

löst.

b) Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6x\sin t, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$u(x,0) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogne Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie eine rotationssymmetrische Lösung $u(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{u}(r, t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe:

$$u_{tt} = c^2 \Delta_3 u, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ r = \|\boldsymbol{x}\|_2,\ t > 0,$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \sin(\|\boldsymbol{x}\|_2), \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0 .$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $r\tilde{u}(r, t)$ nach Vorlesung die Wellengleichung im $\mathbb{R}^1$ löst und verwenden Sie die allgemeine Darstellung der Lösung der Wellengleichung.

b) Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0, \qquad \boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = y(x + y + z), \qquad u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0 .$$

Abgabetermin: 26/28.06.07