Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier, Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1: [Klausur Februar 2006]

a) Zeigen Sie, dass die Fourier–Koeffizienten der ungerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion $g(y) = y^2 - y,\ 0 \le y \le 1$, gegeben sind durch

$$a_k = 0\,, \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0 & x \in (0,1)\,, \\ u(x,1) = 0 & x \in (0,1)\,, \\ u(0,y) = g(y) = y^2 - y & y \in (0,1)\,, \\ u(1,y) = 0 & y \in (0,1)\,. \end{array}$$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = e^{-x^2}$ unter direkter Verwendung der Fundamentallösung.

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie mit Hilfe geeignetener Produktansätze die Lösungen folgender Aufgaben.

a) $u_t = u_{xx} \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \quad u(x,0) = \sin(x) + 2\cos(2x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$

b)

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(4x)}{4} \qquad 0 < x < \pi\,, \quad u(\pi,t) = u(0,t) = 0 \qquad t > 0.$$

Aufgabe 4: Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rlr} u_t = & u_{xx} + u_{yy}, & x,y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,y,t)) = & u(\pi,y,t) = 0, & \text{für } y \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,0,t)) = & u(x,\pi,t) = 0, & \text{für } x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(x,y,0) = & \frac{1}{2}\left(\sin(2x) + \sin(x)\right)\sin(y) & \text{für } x,y \in (0,\pi). \end{array}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Abgabetermin: 12/14.06.07