Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. J. Stuckmeier
Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Rotationsinvarianz der Laplacegleichung : Sei u eine Lösung der Laplacegleichung und S eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass dann auch

$$v(y) := u(Sy) \qquad \text{mit } x = Sy \in \mathbb{R}^n$$

die Laplacegleichung löst.

b) Sei u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^2$, mit

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 < 4, \\ u(x,y) &= \frac{x+y}{4} \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

c) Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Zeigen Sie , dass dann auch $v(x,t) := u(cx, c^2 t)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, && \text{auf } \mathbb{R}^2\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(4\pi x) && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x) = \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösungen für $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
12u_{xx} + 7u_{xy} - 12u_{yy} &= 0 \quad \text{für } x,\, y \in \mathbb{R}, \\
u(x,y) &= \sin(y) \quad \text{für } x = 7y,\, y \in \mathbb{R}, \\
7u_y(x,y) - u_x(x,y) &= 0 \quad \text{für } x = 7y,\, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Normalform und bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung.

b) Lösen Sie die transformierte Gleichung mit den dazugehörigen Anfangswerten.

c) Geben Sie die Lösung in den ursprünglichen Koordinaten (x und y an).

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle Rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta(u) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 9, \\
u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\
u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 9.
\end{aligned}$$

Hinweis: Vorlesung Folie 66 ff.

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta(u) &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2 + y^2 \le 9, \\
u(x,y) &= \frac{x}{9}\,(x-y) \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 9\,.
\end{aligned}$$

Hinweise: Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz! Die Lösung ist NICHT rotationssymmetrisch!

$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$, $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)\,.$

Abgabetermin: 22/24.05.07