Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Klausurberatung

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Klausur Mathe III:

Termin, Ort, Ablauf,
Materialien und Hilfsmittel

Termin, und Ort und Ablauf

Termin: Di., 04.03.25, 11:00 - 13:00 (Ana III und DGL I)
11:00 - 12:00 (nur DGL I)

Ort: Sporthalle Hamburg *(Alsterdorfer Sporthalle)*
Krochmannstr. 55
22297 Hamburg

Falls Sie zu dieser Gruppe gehören, wissen Sie das.

Für **Ana III und DGL I** (Standardfall):

- Sie erhalten zwei Klausuren.
- Sie haben 120 Minuten, die Sie sich frei einteilen können.
- Am Ende werden beide Klausuren gemeinsam bewertet.

Für **nur DGL I**:

- Sie erhalten eine Klausur.
- Sie haben 60 Minuten.
- Nach 60 Minuten verlassen Sie die Halle.

Mehr zum Ablauf

Wenn Ihre Auflage "Halle 3" ist, schreiben Sie beides.

Die Halle wird in **drei Bereiche** aufgeteilt:

- Nur DGL I (LuM, Auflage für Masterstudiengänge)
- Ana III und DGL I (Deutsch)
- Ana III und DGL I (Englisch)

Wenn Sie in der Halle sind:

- Nehmen Sie in Ihrem Bereich platz, bleiben Sie sitzen.
- Wir verteilen die Klausuren. Sie füllen die Deckblätter aus. Sie dürfen die **Klausuren nicht öffnen** bis das Startsignal erfolgt. **Verfrühtes Öffnen der Klausur zählt als Täuschungsversuch!**

Während der Klausur:

- Wir kontrollieren die Anwesenheit. Legen Sie hierfür gut sichtbar Ihren Ausweis und eine Klausur mit ausgefülltem Deckblatt bereit.
- Für die Einsicht des Deckblatts der Klausur, an der sie im Moment arbeiten, müssen wir Sie leider kurz stören.

Materialien und Hilfsmittel

Sie **müssen** mitbringen:

- Schreibzeug (kein Bleistift, kein Rotstift), aber Sie brauchen *kein* eigenes Papier
- einen amtlichen Lichtbildausweis (Perso, Reisepass, Führerschein, Aufenthaltstitel)

Sie **können** mitbringen:

- je Modul eine eigene Ausarbeitung/Stoffsammlung mit 2 Blättern DIN A4, Vor- und Rückseite beschriftet:
  - Mathe III (Ana III + DGL I): 4 Blätter $\widehat{=}$ 8 Seiten
  - Mathe III - DGL I: 2 Blätter $\widehat{=}$ 4 Seiten
- eine nicht-smarte Uhr, die keine störenden Geräusche verursacht

Es gibt leider keine Uhr in der Halle.

Sie **dürfen nicht** mitbringen:

- Smartphones, Smartwatches
- Taschenrechner oder andere elektronische Hilfsmittel
- Lehrbücher, Formelsammlungen etc., die über das oben genannte hinaus gehen

2. Klausur DGL I:

Vorkenntnisse, typische Themen, weitere Tipps

Benötigte Vorkenntnisse

Wir wollen nicht testen, wie gut Sie komplizierte Integrale lösen können. Aber ein bisschen rechnen werden Sie müssen.

Sie sollten sicher beherrschen:

- (partielles) Ableiten
- elementare Integrale
- Berechnung von Eigenwerten, Eigen- und Hauptvektoren
- Lösung von linearen Gleichungssystemen
- elementares Rechnen mit komplexen Zahlen

Vorbemerkungen

Im Folgenden besprechen wir einige Themen, die in den letzten Jahren häufig in den Klausuren vorkamen. Die soll Ihnen für die Orientierung bei der Klausurvorbereitung helfen.

Aber:

- Falls ein Thema aus der Vorlesung / den Übungen hier nicht auftaucht, folgt daraus **nicht**, dass es nicht in der Klausur vorkommen kann.
- Wir haben nicht die Zeit hier alles zu wiederholen, es folgen nur ein paar Stichpunkte.

Tendenz: Stoff aus den Präsenzübungen sind die Basics, HA eher zur Vertiefung (kann trotzdem wichtig sein!)

Anfangs- und Randwertprobleme

Wichtige Punkte:

- Die **allgemeine Lösung** einer DGL enthält frei wählbare Konstanten.
- Durch **Anfangsbedingungen** (oder Randbedingungen) können diese Konstanten festgelegt werden.
- Ein skalares Problem der Ordnung m braucht m Bedingungen für eine eindeutige Lösung.

Elementare Lösungsmethoden für skalare Probleme erster Ordnung

Wichtige Punkte:

- Wir haben verschiedene Lösungsmethoden für DGLn kennengelernt.
- Diese lassen sich jeweils für bestimmte Typen von DGLn anwenden.
- Lineare und separierbare DGLn können wir (oft) direkt Lösen können.
- Sonst versuchen wir meist die DGL auf eine lineare oder eine separierbare DGL zurückzuführen.

Sie sollten schnell sehen, welcher der Typen vorliegt.

Lineare DGL erster Ordnung (→ P2, HA1)

WICHTIGES WERKZEUG!

DGL (linear, erste Ordnung):

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$

Beispiel:

P2: A1, HA1

Lösungsansatz:

$A(t)$: Stammfunktion von $a(t)$, $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$,

$B^*(t)$: Stammfunktion von $\mathrm{e}^{-A(t)}b(t)$, $B^*(t) = \int \mathrm{e}^{-A(t)}b(t)\,\mathrm{d}t$.

Lösungsformel für die allgemeine Lösung:

$$u(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \cdot [B^*(t) + C], \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Lösungsformel für das Anfangswertproblem mit $u(t_0) = y_0$:

$$u(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \cdot \left[\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-A(s)}b(s)\,\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}\right].$$

Bernoulli-DGL

DGL (Bernoulli):

$$u'(t) \;=\; a(t)u(t) + b(t)u(t)^{\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad b \neq 0.$$

Beispiel:

P2: A3

.

Lösungsansatz: Substitution $y(t) = u(t)^{1-\alpha}$.

Neue DGL:

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) \;+\; (1-\alpha)b(t) \qquad \rightarrow \qquad \text{lineare DGL}$$

Rücksubstitution: $u(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Separierbare DGL (→ P2, HA2, HA3)

WICHTIGES WERKZEUG!

DGL (separierbar):	**Beispiel:**
$u'(t) = g(u) \cdot h(t)$	P2: A2, HA2

Lösungsansatz: Erst Nullstellen von $g(u)$ prüfen. Für $g(u) \neq 0$: Trennung der Variablen:

$$\int \frac{1}{g(u)}\, \mathrm{d}u = \int h(t)\, \mathrm{d}t.$$

DGL (Ähnlichkeit):	**Beispiel:**
$u'(t) = f\,(u(t)/t)$	HA3: A1

Lösungsansatz: Substitution $y(t) = u(t)/t$. Neue DGL:

$$y'(t) = (f(y(t)) - y(t)) \cdot \frac{1}{t} \qquad \rightarrow \qquad \text{separierbare DGL}$$

Rücksubstitution: $u(t) = ty(t)$.

Exakte DGL ($\rightarrow$ P3)

DGL:

$$f(t,u) + g(t,u)u'(t) = 0$$

Beispiel:

P3: A2, P3:A3

Lösungsansatz:

1. Auf Exaktheit testen: Gilt $f_u = g_t$?
2. Falls ja, bestimme Potential $\Psi(t,u)$ durch Integration.
3. Löse $\Psi(t,u) = C$ nach u auf. (Falls möglich.)

Sollten Sie auch für die Ana III können.

(Integrierende Faktoren eher zu aufwändig für die Klausur)

Linear, skalar, konstante Koeffizienten (→ P4, HA4) Kommt sehr oft dran.

DGL (**linear, Ordnung** m):

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b, \qquad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}, \quad a_m \neq 0$$

Beispiel:

P4: A1, A2, HA4:A2

Lösungsansatz: Für das homogene Problem ($b = 0$):

- Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, Nullstellen $\lambda_j,\ 1 \leq j \leq m$ (ggf. mit Vielfachheit).
- Basislösungen: $\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ falls λ_j einfache NST, $\{\mathrm{e}^{\lambda_j t},\ t\mathrm{e}^{\lambda_j t}\}$, falls λ_j doppelte NST
- Fundamentalsystem: Basis des Lösungsraums (Dimension m).
- Komplexe NST treten immer paarweise konjugiert auf. Ggf. reelle Lösung bestimmen mithilfe von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)$.

Inhomogene Probleme / Formulierung als System $(\to$ HA4)

Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ($b \neq 0$): $u = u_h + u_p$, mit

u_h : allg. Lösung des homogenen Problems (siehe oben)

u_p : *eine* partikuläre Lösung des inhomogenen Problems

haben wir hier nicht gemacht

Bestimme u_p durch einen speziellen Ansatz (oder Variation der Konstanten.)

Oder: Schreibe $y = (u, u', \dots, u^{(m-1)})^\top$, bestimme System $y' = Ay$ und wende die Techniken aus dem nächsten Abschnitt an ($\to$ HA4:A2).

Haben wir in diesem Kontext nicht geübt, geht aber genauso wie in den anderen Fällen.

Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten (→ P4, P5, HA4, HA5)

KOMMT MIT EXTREM HOHER WAHRSCHEINLICHKEIT DRAN!

DGL (**lineares $(m \times m)$-System**):

$$u' = Au + b, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times m},\ b \in \mathbb{R}^m, \quad u : I \to \mathbb{R}^m$$

Beispiel:

P4: A3, P5:A1 , HA5:A2

- Bestimme Eigenwerte λ_j und zugehörige Eigenvektoren $v^{[j]}$ von A.
- Für einfache Eigenwerte: Basislösung $\mathrm{e}^{\lambda_j t} v^{[j]}$.
- Für doppelte Eigenwerte mit geometrischer Vielfachheit Eins: Bestimme Hauptvektor $w^{[j]}$ als Lösung von $(A - \lambda_j I)w^{[j]} = v^{[j]}$.
  Basislösungen: $\mathrm{e}^{\lambda_j t} v^{[j]},\ \mathrm{e}^{\lambda_j t}\left(w^{[j]} + t v^{[j]}\right)$
- Die Menge dieser Basislösungen ist ein **Fundamentalsystem**. Die Matrix mit den Basislösungen als Spalten heißt **Fundamentalmatrix**, $W(t)$.

Mehr zu Systemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Bei komplexen Eigenwerten: ($\longrightarrow$ P5:A2.(b), HA4:A1)

- Komplexe Eigenwerte und zugehörige komplexe Eigenvektoren treten immer paarweise konjugiert auf.
- Zum komplexen Eigenwert λ_j mit komplexen Eigenvektor v sind $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t} v),\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t} v)$ reelle Lösungen.

Eher aufwändig.

Bei inhomogenen Problemen: $u' = Au + b(t)$:

- Allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$.
- Ansatz für partikuläre Lösung: $u_p(t) = W(t)k(t)$ mit Fundamentalmatrix W und zu bestimmenden Koeffizienten k.
- Finde k als Lösung von $W(t)k'(t) = b(t)$ ($\longrightarrow$ P5:A2.(a)).
- Oder: Finde u_p durch einen speziellen Ansatz ($\longrightarrow$ P5:A2.(b))

Stabilität für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten (→ P6)

Für das System $u' = Au + b$ sind **Ruhelagen** Lösungen von $Au^* = -b$ (d.h. $(u^*)' = 0$).

Dabei gilt:

- Falls alle Eigenwerte von A ungleich Null sind, gibt es genau eine Ruhelage ($u^* = 0$ für $b = 0$).
- Stabilität (oder Instabilität, asymptotische Stabilität) hängt von den Realteilen der Eigenwerte ab.
- Für $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ muss man ggf. noch die geometrische Vielfachheit prüfen.

Hat man alle EW schon für das Fundamentalsystem berechnet, ist das hier schnell gemacht!

DGL (linear, skalar, Ordnung m):

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b, \qquad a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}, \quad a_m \neq 0$$

Anfangsdaten für $u, u', \ldots, u^{(m-1)}$.

- Übersetze die DGL in eine algebraische Gleichung $(d_m s^m + \cdots + d_1 s + d_0) U(s) = B(s)$.
- Verwende hierfür Rechenregeln für die Korrespondenz von Ableitungen und Anfangsdaten und lies die rechte Seite aus einer Tabelle hab.
- Löse nach U auf.
- Für die Rücktransformation: Lies inverse Korrespondenzen aus einer Tabelle ab. Verwende ggf. Partialbruchzerlegung und Rechenegeln für die Verschiebung im Bildraum.

Was **nicht** drankommen wird

Folgendes kommt mit Sicherheit nicht vor:

- Modellierungsaufgaben
- Zeichnungen
- (aufwändige) Beweise

Weitere Ressourcen

Alte Klausuren:

- Sie finden die Klausuren der vorherigen Jahre auf der Lehrexportwebsite (Link in Stud.IP)
- Beachten Sie, dass die Lehrenden in vorherigen Veranstaltung ggf. inhaltlich andere Schwerpunkte gesetzt und eine abweichende Notation verwendet haben.
- Es können andere Aufgabentypen als in vorherigen Klausuren vorkommen.

Sprechstunden / Kontakt:

- In den Wochen **17.02. - 21.02.** und **14.02. - 28.02.** bieten wir an der UHH Sprechstunden zur Klausurvorbereitung an (Termine folgen auf der Lehrexportwebsite und in Stud.IP)
- Einfache Fragen können wir auch per Mail (claus.goetz@uni-hamburg.de oder DM in Stud.IP) klären.