

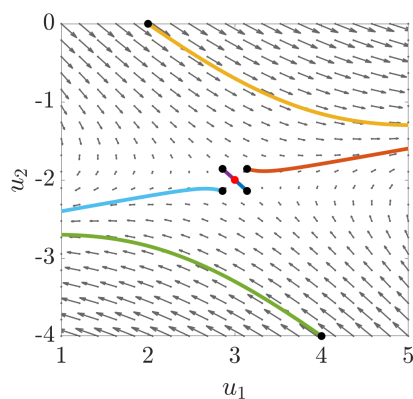
## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften Hausaufgaben 6 - Lösungen

**Aufgabe 1:** Skizzieren die durch die folgenden Funktionen  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definierten Vektorfelder. Skizzieren Sie innerhalb dieser Vektorfelder einige Trajektorien von  $u' = F(u)$ , sowie die Ruhelagen.

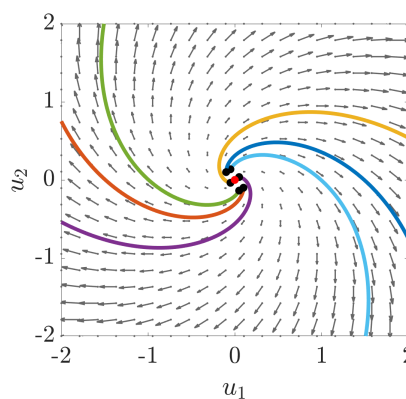
$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad F(u) &= \begin{pmatrix} u_1 + 5u_2 + 7 \\ u_1 - 3u_2 - 9 \end{pmatrix}, & \text{(ii)} \quad F(u) &= \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ -u_1 + u_2 \end{pmatrix} \\
 \text{(iii)} \quad F(u) &= \begin{pmatrix} -u_1 - 2u_2 - 6 \\ 5u_1 + u_2 - 6 \end{pmatrix} & \text{(iv)} \quad F(u) &= \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_1 - u_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

*Hinweis:* Die Ruhelagen haben wir in den Präsenzübungen, Blatt 6, Aufgabe 1 bestimmt.

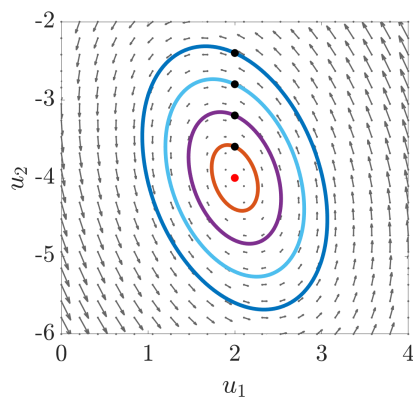
**Lösung.**



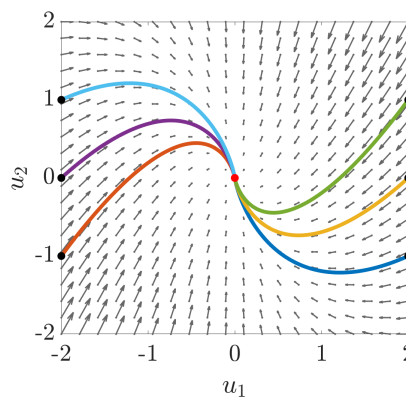
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Dabei sind die roten Punkte jeweils die Ruhelagen und die schwarzen Punkte Startpunkte der jeweiligen Trajektorien bei  $t = 0$ . Wir beobachten das folgende Verhalten:

- (i) Es gibt Trajektorien, die in der Nähe der Ruhelage starten und in diese hinein laufen. Es gibt aber auch Trajektorien, die in der Nähe der Ruhelage starten und von ihr weg verlaufen. Die Ruhelage ist ein sogenannter *Sattelpunkt* (instabil).
- (ii) Alle Trajektorien, die in der Nähe der Ruhelage starten, verlaufen spiralförmig von der Ruhelage weg. Hier liegt ein *instabiler Strudelpunkt*,
- (iii) Alle Trajektorien, die in der Nähe der Ruhelage starten, verlaufen periodisch um die Ruhelage herum. Hier liegt ein *Wirbelpunkt* (stabil, nicht asymptotisch stabil).
- (iv) Alle Trajektorien laufen in die Ruhelage hinein. Hier liegt ein *stabiler Strudelpunkt* (asymptotisch stabil).

**Aufgabe 2:** Wir betrachten ein Modell für ein Ökosystem: Angenommen, es gibt Pflanzen  $u_1(t)$ , die von Elchen  $u_2(t)$  gefressen werden, während die Elche wiederum von den Wölfen  $u_3(t)$  gefressen werden. Wir nehmen an, dass sich jede Spezies für sich genommen nach einem logistischen Wachstum entwickelt. Wir nehmen weiter an, dass die Interaktion zwischen zwei Populationen proportional zum Produkt ihrer Populationsgrößen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle auftauchenden Parameter gleich Eins sind. Wir erhalten das System

$$\left. \begin{aligned} u_1' &= u_1(1 - u_1) - u_1u_2, \\ u_2' &= u_2(1 - u_2) + u_1u_2 - u_2u_3, \\ u_3' &= u_3(1 - u_3) + u_2u_3. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Wir schreiben das System (??) als  $u' = F(u)$  mit  $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ .

- (a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix  $A(u) := JF(u)$ .

**Lösung.**

$$A(u) = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1 - u_2 & -u_1 & 0 \\ u_2 & 1 - 2u_2 + u_1 - u_3 & -u_2 \\ 0 & u_3 & 1 - 2u_3 + u_2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass für  $u^* := (2/3, 1/3, 4/3)^\top$  gilt: Es ist  $F(u^*) = (0, 0, 0)^\top$  und  $(0, 0, 0)^\top$  ist eine asymptotisch stabile Ruhelage des linearisierten Systems  $u' = A(u^*)u$ .

*Bemerkung:* Man kann zeigen, dass  $u^*$  die einzige Ruhelage von (??) ist, in der alle Populationsgrößen positiv sind.

**Lösung.** Der einzige stationäre Punkt, in dem alle Populationsgrößen positiv sind, ist  $u^* = (2/3, 1/3, 4/3)^\top$ . Dort gilt

$$A(u^*) = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 4/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{7}{3}\lambda^2 + \frac{20}{9}\lambda + \frac{8}{9}$$

und die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2i}{3}.$$

Alle Eigenwerte haben negativen Realteil und die Ruhelage ist asymptotisch stabil.