Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 6

Aufgabe 1: Skizzieren die durch die folgenden Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definierten Vektorfelder. Skizzieren Sie innerhalb dieser Vektorfelder einige Trajektorien von $u' = F(u)$, sowie die Ruhelagen.

$$\text{(i)} \quad F(u) = \begin{pmatrix} u_1 + 5u_2 + 7 \\ u_1 - 3u_2 - 9 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad F(u) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ -u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iii)} \quad F(u) = \begin{pmatrix} -u_1 - 2u_2 - 6 \\ 5u_1 + u_2 - 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \quad F(u) = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Ruhelagen haben wir in den Präsenzübungen, Blatt 6, Aufgabe 1 bestimmt.

Aufgabe 2: Wir betrachten ein Modell für ein Ökosystem: Angenommen, es gibt Pflanzen $u_1(t)$, die von Elchen $u_2(t)$ gefressen werden, während die Elche wiederum von den Wölfen $u_3(t)$ gefressen werden. Wir nehmen an, dass sich jede Spezies für sich genommen nach einem logistischen Wachstum entwickelt. Wir nehmen weiter an, dass die Interaktion zwischen zwei Populationen proportional zum Produkt ihrer Populationsgrößen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass alle auftauchenden Parameter gleich Eins sind. Wir erhalten das System

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1(1-u_1) - u_1u_2, \\ u_2' &= u_2(1-u_2) + u_1u_2 - u_2u_3, \\ u_3' &= u_3(1-u_3) + u_2u_3. \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

Wir schreiben das System $(*)$ als $u' = F(u)$ mit $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $A(u) := JF(u)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $u^* := (2/3,\ 1/3,\ 4/3)^\top$ gilt: Es ist $F(u^*) = (0,0,0)^\top$ und $(0,0,0)^\top$ ist eine asymptotisch stabile Ruhelage des linearisierten Systems $u' = A(u^*)u$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass u^* die einzige Ruhelage von $(*)$ ist, in der alle Populationsgrößen positiv sind.

Abgabe: Bis 24. Januar 2025