Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 5 - Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $u_1,\ u_2,\ u_3 : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Die *Wronski-Determinante* ist definiert als

$$\mathrm{WD}(t) := \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u_3'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u_3''(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Sind u_1, u_2, u_3 linear abhängig, so gilt $\mathrm{WD}(t) = 0$ für alle $t \in I$. Gilt umgekehrt $\mathrm{WD}(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so sind die u_1, u_2, u_3 linear unabhängig.

Hinweis: Wir erinnern daran, dass die Funktionen $u_1,\ u_2,\ u_3$ linear abhängig sind, wenn es $(c_1, c_2, c_3)^\top \neq (0,0,0)^\top$ gibt, sodass $c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + c_3u_3(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$u_1(t) = 1, \qquad u_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(t), \qquad u_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin(t)$$

auf $I = \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

(c) Finden Sie eine Gleichung der Form

$$a_3u''' + a_2u'' + a_1u' + a_0u = 0$$

mit $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$, für die $M = \{1, \mathrm{e}^{-t}\cos(t),\ \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\}$ ein Fundamentalsystem ist.

Lösung.

(a) Seien u_1, u_2, u_3 linear abhängig. Dann gibt es ein $c = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + c_3u_3(t) = 0 \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Weiterhin ist dann auch

$$\begin{aligned} c_1u_1'(t) + c_2u_2'(t) + c_3u_3'(t) &= 0 \qquad \text{für alle } t \in I, \\ c_1u_1''(t) + c_2u_2''(t) + c_3u_3''(t) &= 0 \qquad \text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u_3'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u_3''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat also für alle $t \in I$ eine nichttriviale Lösung und daher folgt

$$\det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u_3'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u_3''(t) \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Aus der Negation dieser Aussage erhalten wir: Wenn *nicht* $\mathrm{WD}(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt, d.h. wenn $\mathrm{WD}(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so sind u_1, u_2, u_3 *nicht* linear abhängig, d.h. sie sind linear unabhängig.

Beachte, dass dies *nicht bedeutet*, dass im Falle linearer Unabhängigkeit notwendig $\mathrm{WD}(t) \neq 0$ für *alle* $t \in I$ gilt. Man kann allerdings zeigen: Sind u_1, u_2, u_3 linear unabhängig und zusätzlich Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung der Form

$$a_3 u''' + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$$

mit $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$, womit u_1, u_2, u_3 ein Fundamentalsystem für diese Gleichung bilden, so gilt tatsächlich $\mathrm{WD}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(b) Es gilt

$$u_1'(t) = 0, \qquad u_2'(t) = -\mathrm{e}^{-t}(\cos(t) + \sin(t)), \qquad u_3'(t) = \mathrm{e}^{-t}(\cos(t) - \sin(t)),$$

und

$$u_1''(t) = 0, \qquad u_2'' = 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t), \qquad u_3'' = -2\mathrm{e}^{-t}\cos(t).$$

Damit gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{WD}(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-t}\cos(t) & \mathrm{e}^{-t}\sin(t) \\ 0 & -\mathrm{e}^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) & \mathrm{e}^{-t}(\cos(t) - \sin(t)) \\ 0 & 2\mathrm{e}^{-t}\sin(t) & -2\mathrm{e}^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \mathrm{WD}(t) = {} & \left[-\mathrm{e}^{-t}(\cos(t) + \sin(t))\right] \cdot \left[-2\mathrm{e}^{-t}\cos(t)\right] - \left[\mathrm{e}^{-t}(\cos(t) - \sin(t))\right] \cdot \left[2\mathrm{e}^{-t}\sin(t)\right] \\ & = 2\mathrm{e}^{-2t}\left[\cos^2(t) + \sin(t)\cos(t)\right] - 2\mathrm{e}^{-2t}\left[\sin(t)\cos(t) - \sin^2(t)\right] \\ & = 2\mathrm{e}^{-2t}(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 2\mathrm{e}^{-2t} > 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Somit sind u_1, u_2, u_3 linear unabhängig.

(c) Die Funktionen haben die Gestalt

$$1 = \mathrm{e}^{0 \cdot t}, \qquad \mathrm{e}^{-t}\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right) \qquad \mathrm{e}^{-t}\sin(t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right).$$

Dies passt zu den Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - (-1 + \mathrm{i})) \cdot (\lambda - (-1 - \mathrm{i})) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda.$$

Dazu wiederum passt die Differentialgleichung

$$u''' + 2u'' + 2u' = 0.$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für die folgende Matrix die Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung.

Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 6 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((-5-\lambda)(4-\lambda)+18) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

Wir haben also $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit Zwei.

Eigenvektor $v^{[1]}$ zu $\lambda_1 = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten also z.B.

$$v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} o & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir sehen, dass Lösungen die Form

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

haben müssen. Wir haben also mit

$$v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige Eigenvektoren gefunden und die algebraische Vielfachheit entspricht der geometrischen Vielfachheit. Wir brauchen hier also keine Hauptvektoren der zweiten Stufe.