

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Hausaufgaben 5

### Aufgabe 1:

- (a) Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und seien  $u_1, u_2, u_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Die *Wronski-Determinante* ist definiert als

$$\text{WD}(t) := \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & u_3'(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) & u_3''(t) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Sind  $u_1, u_2, u_3$  linear abhängig, so gilt  $\text{WD}(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . Gilt umgekehrt  $\text{WD}(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in I$ , so sind die  $u_1, u_2, u_3$  linear unabhängig.

*Hinweis:* Wir erinnern daran, dass die Funktionen  $u_1, u_2, u_3$  linear abhängig sind, wenn es  $(c_1, c_2, c_3)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$  gibt, sodass  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + c_3 u_3(t) = 0$  für alle  $t \in I$  gilt.

- (b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = e^{-t} \cos(t), \quad u_3(t) = e^{-t} \sin(t)$$

auf  $I = \mathbb{R}$  linear unabhängig sind.

- (c) Finden Sie eine Gleichung der Form

$$a_3 u''' + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u = 0$$

mit  $a_0, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$ , für die  $M = \{1, e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t)\}$  ein Fundamentalsystem ist.

**Aufgabe 2:** Bestimmen Sie für die folgende Matrix die Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$