Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 4 - Lösungen

Aufgabe 1: Wir betrachten in dieser Aufgabe ein lineares *Räuber-Beute-Modell*. Angenommen, es gibt zwei Spezies von Fischen: Die Räuber u_1 und die Beute u_2, wobei die Räuber sich von der Beute ernähren.

(a) Wir beschreiben die zeitliche Entwicklung der beiden Populationen durch

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -a_{1,1}u_1(t) + a_{1,2}u_2(t) + b_1, \\ u_2'(t) &= -a_{2,1}u_1(t) + a_{2,2}u_2(t) + b_2, \end{aligned}$$

wobei $a_{i,j} > 0$ für $1 \le i,j \le 2$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Parameter sind.

Welche Bedeutung haben die einzelnen Terme in diesen Gleichungen? Welche Prozesse werden durch diese Gleichungen beschrieben?

Lösung. Der Term $a_{1,2}u_2$ mit $a_{1,2} > 0$ in der ersten Gleichung bedeutet, dass die Räuberpopulation proportional zur Beute, die als Nahrung zur Verfügung steht, wächst. Wegen des Terms $-a_{1,1}u_1(t)$ mit $a_{1,1} > 0$ würden die Räuber ohne Nahrungsquelle aussterben.

In der zweiten Gleichung sehen wir: Die Beute wächst proportional zur Populationsgröße ($a_{2,2}u_2, \quad$ mit $\quad a_{2,2} > 0$) und schrumpft proportional zur Größe der Räuberpopultaion ($-a_{2,1}u_1 \quad$ mit $\quad a_{2,1} > 0$).

Die Terme b_1 und b_2 können exogene Effekte beschreiben, wie z.B. Fischfang oder Zuwanderung von außerhalb.

(b) Sei nun

$$a_{1,1} = a_{2,1} = a_{2,2} = \frac{1}{3}, \quad a_{1,2} = \frac{2}{3}, \quad b_1 = b_2 = 0, \qquad A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$w_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{3}t} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix},$$

ein *komplexes* Fundamentalsystem, und durch

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t/3) + \cos(t/3) \\ \cos(t/3) \end{pmatrix}, \qquad q_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t/3) - \cos(t/3) \\ \sin(t/3) \end{pmatrix},$$

ein *reelles* Fundamentalsystem des homogenen Systems $u' = Au,\ u = (u_1, u_2)^\top$, gegeben ist.

Lösung. Die Eigenwerte ergeben sich aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 \;=\; \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \;=\; -\left(\frac{1}{3} + \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) + \frac{2}{9} \;=\; \lambda^2 + \frac{1}{9} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{\mathrm{i}}{3}.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren, $Av_k = \lambda_k v_k,\ k = 1, 2$, sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Somit bilden die Funktion $w_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1,\ w_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2$ ein komplexes Fundamentalsystem.

Daraus erhalten wir ein reelles Fundamentalsystem, indem wir $\mathrm{R}e(w_1),\ \mathrm{I}m(w_1)$ betrachten. Mithilfe der Eulerschen Identität erhalten wir

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{3}} = \cos(t/3) + \mathrm{i}\sin(t/3)$$

und daher

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} &= (\cos(t/3) + \mathrm{i}\sin(t/3))\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t/3) + \mathrm{i}\sin(t/3) - \mathrm{i}\cos(t/3) + \sin(t/3) \\ \cos(t/3) + \mathrm{i}\sin(t/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(t/3) + \cos(t/3) \\ \cos(t/3) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} \sin(t/3) - \cos(t/3) \\ \sin(t/3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit gilt $q_1 = \mathrm{R}e(w_1),\ q_2 = \mathrm{I}m(w_1)$ und wir erhalten ein reelles Fundamentalsystem.

(c) Lösen Sie das *homogene* Anfangswertproblem $u' = Au,\ u(0) = (4, 8)^\top$. Sind u_1, u_2 für alle $t > 0$ positiv?

Lösung. Die Lösung lässt sich mithilfe des Fundamentalsystems schreiben als

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \sin(t/3) + \cos(t/3) \\ \cos(t/3) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin(t/3) - \cos(t/3) \\ \sin(t/3) \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ durch die Anfangsbedingung bestimmt werden. Wir haben

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $c_1 = 8$ und somit $4 = 8 - c_2$, also $c_2 = 4$. Die Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sin(t/3) + 4\cos(t/3) \\ 4\sin(t/3) + 8\cos(t/3) \end{pmatrix}.$$

Wir haben $u_2(t) = 8\cos(t/3) + 4\sin(t/3)$. Grob gesagt: Der $8\cos(t/3)$-Teil kann negativ werden und die $4\sin(t/3)$ sind dann zu klein um einen positiven Wert zu erhalten. Analog gilt, dass auch u_1 negative Werte annimmt.

Genauer: Für $t_* = 3(\arctan(-2) + \pi) \approx 6.103$ gilt $u_2(t_*) = 0$ und für $t \in (t_*,\ t_* + 3\pi)$ gilt $u_2(t) < 0$. Wir können in dem linearen, homogenen 2×2-Modell keine periodischen Lösungen erhalten, die für alle t positiv sind.

(d) Lösen Sie das *inhomogene* Anfangswertproblem $u' = Au + b,\ u(0) = (4,8)^\top$ mit $b = (-4,2)^\top$. Skizzieren Sie die Lösung für $t \in [0, 12\pi]$. Beschreiben Sie das qualitative Verhalten der Lösung.

Hinweis: Es gibt eine konstante partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Lösung. Für eine konstante partikuläre Lösung u_p gilt

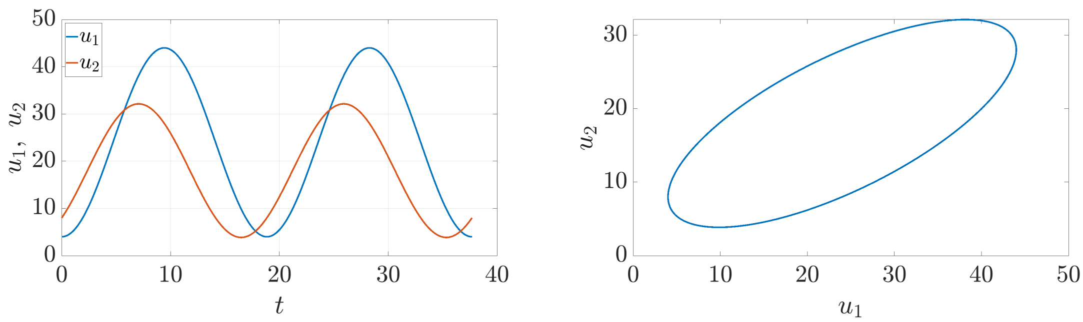
$$0 \;=\; u_p' = Au_p + b \qquad \Rightarrow \qquad u_p = -A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad u_p = -\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ist also $u = c_1 q_1 + c_2 q_2 + u_p$ und wir erhalten

$$u_1(0) = 4 = c_1 - c_2 + 24, \qquad u_2(0) = 8 = c_1 + 18 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -10, \qquad c_2 = 10.$$

Die Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 - 20\cos(t/3) \\ 18 + 10\sin(t/3) - 10\cos(t/3) \end{pmatrix}.$$



Zunächst wachsen beide Populationen, bis es so viele Räuber gibt, dass die Beutepopulation sinkt. Die Räuberpopulation wächst weiter, bis es so wenig Nahrung gibt, dass sie wieder fällt. Ist die Zahl der Räuber gering genug, erholt sich die Beutepopulation und wächst wieder. Das führt wiederum, mit zeitlicher Verzögerung, zu einem Anstieg in der Zahl der Räuber. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u''' - 4u'' - 20u' + 48u = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.

Lösung. Charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 20\lambda + 48 = (\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-6) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$ liefern das Fundamentalsystem $u_1(t) = e^{-4t}$, $u_2(t) = e^{2t}$, $u_3(t) = e^{6t}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{6t} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Schreiben Sie die Gleichung als System erster Ordnung. Bestimmen Sie für dieses System die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren, sowie eine Fundamentalmatrix.

Lösung. Mit $(u_0, u_1, u_2)^\top := (u, u', u'')^\top$ können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -48 & 20 & 4 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt mit Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda(-\lambda(4-\lambda) - 20) - 48 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 20\lambda - 48 = -p(\lambda).$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Fundamentalmatrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{6t} \\ -4\mathrm{e}^{-4t} & 2\mathrm{e}^{2t} & 6\mathrm{e}^{6t} \\ 16\mathrm{e}^{-4t} & 4\mathrm{e}^{2t} & 36\mathrm{e}^{6t} \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall kann man die Fundamentalmatrix auch direkt aus dem Fundamentalsystem in Teil (a) erhalten: In der ersten Zeile stehen die jeweiligen Basislösungen, in der zweiten ihre Ableitungen und in der dritten ihre zweiten Ableitungen.