Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 4

Aufgabe 1: Wir betrachten in dieser Aufgabe ein lineares *Räuber-Beute-Modell*. Angenommen, es gibt zwei Spezies von Fischen: Die Räuber u_1 und die Beute u_2, wobei die Räuber sich von der Beute ernähren.

(a) Wir beschreiben die zeitliche Entwicklung der beiden Populationen durch

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= -a_{1,1}u_1(t) + a_{1,2}u_2(t) + b_1, \\ u_2'(t) &= -a_{2,1}u_1(t) + a_{2,2}u_2(t) + b_2, \end{aligned}$$

wobei $a_{i,j} > 0$ für $1 \leq i,j \leq 2$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Parameter sind.

Welche Bedeutung haben die einzelnen Terme in diesen Gleichungen? Welche Prozesse werden durch diese Gleichungen beschrieben?

(b) Sei nun

$$a_{1,1} = a_{2,1} = a_{2,2} = \frac{1}{3}, \quad a_{1,2} = \frac{2}{3}, \quad b_1 = b_2 = 0, \qquad A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$w_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{3}t}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{3}t}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix},$$

ein *komplexes* Fundamentalsystem, und durch

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(t/3) + \cos(t/3) \\ \cos(t/3) \end{pmatrix}, \qquad q_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t/3) - \cos(t/3) \\ \sin(t/3) \end{pmatrix},$$

ein *reelles* Fundamentalsystem des homogenen Systems $u' = Au,\ u = (u_1, u_2)^\top$, gegeben ist.

(c) Lösen Sie das *homogene* Anfangswertproblem $u' = Au,\ u(0) = (4, 8)^\top$. Sind u_1, u_2 für alle $t > 0$ positiv?

(d) Lösen Sie das *inhomogene* Anfangswertproblem $u' = Au + b,\ u(0) = (4, 8)^\top$ mit $b = (-4, 2)^\top$. Skizzieren Sie die Lösung für $t \in [0, 12\pi]$. Beschreiben Sie das qualitative Verhalten der Lösung.

Hinweis: Es gibt eine konstante partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u''' - 4u'' - 20u' + 48u = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.

(b) Schreiben Sie die Gleichung als System erster Ordnung. Bestimmen Sie für dieses System die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren, sowie eine Fundamentalmatrix.

Abgabe: bis 13. Dezember 2024