Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgaben 3 - Lösungen

Aufgabe 1: Formen Sie die folgenden Gleichungen in *Ähnlichkeits-Differentialgleichungen* um und lösen Sie sie durch geeignete Substitution. Sind die Lösungen für alle $t > 0$ definiert?

(a)
$$tu(t)^2 u'(t) = u(t)^3 + t^3, \qquad t > 0.$$

(b)
$$tu'(t) - u(t) = te^{u(t)/t}, \qquad t > 0.$$

Lösung.

(a) Wir können schreiben

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t} + \left(\frac{u(t)}{t}\right)^{-2} = f(y(t)),$$

mit $y(t) := u(t)/t$ und $f(y) = y + y^{-2}$. Aus $y(t) = u(t)/t$ folgt

$$y'(t) = \frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} = \frac{u'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t} \quad \Rightarrow \quad u'(t) = ty'(t) + y(t).$$

Damit folgt

$$ty'(t) + y(t) = f(y(t)) = y(t) + y(t)^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad y'(t) = \frac{1}{t} y(t)^{-2}.$$

Das können wir durch Trennung der Variablen lösen:

$$\int y^2 \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} y^3 = \ln(t) + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = \sqrt[3]{3\ln(t) + 3\tilde{c}},$$

und damit

$$u(t) = t\sqrt[3]{3\ln(t) + c}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion u ist für alle $t > 0$ definiert. Aber in $t_* = e^{-c/3} > 0$ ist $u(t_*) = 0$ und die Differentialgleichung somit nicht mehr erfüllt. In diesem Fall gilt $y = 0$ und $f(y)$ ist nicht definiert. Die Funktion u ist also nur eine Lösung für $0 < t < e^{-c/3}$.

(b) Wir haben

$$u'(t) \;=\; \frac{u(t)}{t} + \mathrm{e}^{u(t)/t} \;=\; f(y(t)),$$

mit $y(t) := u(t)/t$ und $f(y) = y + \mathrm{e}^y$. Weiterhin gilt

$$u'(t) = ty'(t) + y(t)$$

und somit erhalten wir

$$ty'(t) + y(t) = f(y(t)) = y(t) + \mathrm{e}^{y(t)} \qquad \Rightarrow \qquad y'(t) = \frac{1}{t}\mathrm{e}^{y(t)},$$

was wir wieder durch Trennung der Variablen lösen:

$$\int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{e}^{-y} = \ln(t) + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y(t) = -\ln(-\ln(t) - \tilde{c}).$$

Daraus folgt schließlich

$$u(t) = -t\ln(-\ln(t) + c), \qquad c = -\tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Der äußere Logarithmus benötigt ein positives Argument, also ist die Lösung nur definiert für

$$-\ln(t) + c > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(t) < c \qquad \Leftrightarrow \qquad t < \mathrm{e}^c.$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die folgende *Riccati'sche* Differentialgleichung:

$$u'(t) = \frac{1}{t-t^2}u(t) \;-\; \frac{t}{t-t^2}u(t)^2 \;+\; \frac{t-1}{t-t^2}, \qquad t \in (0,1).$$

(a) Finden Sie *eine spezielle* Lösung u_0 dieser Gleichung.

Hinweis: Es gibt eine konstante Lösung.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.

Lösung.

(a) Da die Koeffizienten sich zu Null summieren, sehen wir, dass $u_0 \equiv 1$ eine Lösung ist.

(b) Mit

$$a(t) \;=\; \frac{1}{t-t^2}, \qquad b(t) = -\frac{t}{t-t^2}, \qquad u_0(t) = 1,$$

erfüllt

$$y(t) = (u(t)-1)^{-1}$$

nach Vorlesung die lineare DGL erster Ordnung

$$\begin{aligned} y'(t) &= -\left[a(t) + 2u_0(t)b(t)\right] y(t) - b(t) \\ &= -\left[\frac{1}{t-t^2} - \frac{2t}{t-t^2}\right] y(t) + \frac{t}{t-t^2} \;=\; -\frac{1-2t}{t-t^2} y(t) + \frac{t}{t-t^2}. \end{aligned}$$

Wir haben $A(t) = -\ln(t-t^2)$ als Stammfunktion von $-(1-2t)/(t-t^2)$. Damit ist

$$\mathrm{e}^{-A(t)} \cdot \frac{t}{t-t^2} = \mathrm{e}^{\ln(t-t^2)} \cdot \frac{t}{t-t^2} = t,$$

d.h. mit $B^*(t) = \frac{1}{2}t^2$ und $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir die allgemeine Lösung als

$$y(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \left(B^*(t) + c\right) = \frac{1}{t-t^2} \left(\frac{1}{2}t^2 + c\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2+2c}{t-t^2}.$$

Schließlich ist

$$u(t) = \frac{1}{y(t)} + 1 = 2 \cdot \frac{t-t^2}{t^2+2c} + 1.$$