Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1: Wir betrachten ein mit Wasser gefülltes zylinderförmiges Fass, sodass das Wasser durch eine kreisförmige Öffnung am Boden des Fasses ausfließt. Die Höhe des Wasserstandes im Fass bezeichnen wir mit h. Unter vereinfachten Annahmen (keine Reibung, keine Wirbel im Wasser, ...) lässt sich h durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \tag{1}$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist, die vom Durchmesser des Fasses, dem Durchmesser der Öffnung und der Gravitationskonstante abhängt.

(a) Lösen Sie für gegebene $K > 0$ und $h_0 > 0$ das Anfangswertproblem

$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \qquad h(0) = h_0,$$

durch Trennung der Variablen.

Berechnen Sie die Zeit t_*, für die $h(t_*) = 0$ gilt.

Lösung: Da es sich hier um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen handelt, können wir eine Lösung formell berechnen durch

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int -K \; dt \\ \Rightarrow \quad & 2\sqrt{h} = -Kt + c, \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}, \\ \Rightarrow \quad & h(t) = \frac{1}{4}(c - Kt)^2. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung liefert

$$h(0) = h_0 = \frac{c^2}{4},$$

und wir erhalten mit $c = 2\sqrt{h_0}$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{K}{2}t\right)^2$$

und somit

$$t_* = \frac{2\sqrt{h_0}}{K}.$$

(b) Ist die Lösung der Anfangswertaufgabe aus Teil (a) für $t > t_*$ definiert?

Lösung: Die Funktion h ist definiert für alle $t > 0$. Aber die Gleichung (1) setzt voraus, dass $h' \leq 0$. Da h aber für $t > t_*$ wächst, erfüllt h für $t > t_*$ die Differentialgleichung nicht. Ein steigender Wasserstand wäre auch nicht physikalisch sinnvoll.

(c) Sei h die Lösung der Anfangswertaufgabe aus Teil (a) und $h(t_*) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{h} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$,

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{für } \ 0 \leq t \leq t_*, \\ 0 & \text{für } \ t > t_*, \end{cases}$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe ist. Zeigen Sie hierzu insbesondere, dass $\tilde{h}$ für alle $t > 0$ differenzierbar ist.

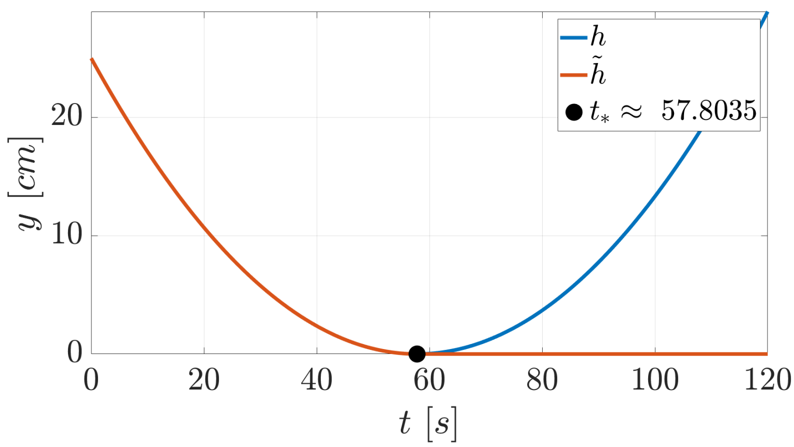
Lösung: Die Nullfunktion ist eine Lösung der Differentialgleichung (1), d.h. stückweise erfüllt $\tilde{h}$ die Differentialgleichung. Wir müssen also prüfen, ob die Differentialgleichung auch in $t = t_*$ erfüllt ist. Die Funktion $\tilde{h}$ ist stetig und stückweise differenzierbar. Es gilt

$$\tilde{h}'(t) = \begin{cases} -K\left(\sqrt{h_0} - \frac{K}{2}t\right) & \text{für } \ 0 \leq t < t_*, \\ 0 & \text{für } \ t > t_*. \end{cases}$$

Wegen

$$\lim_{t \nearrow t_*} \left[-K\left(\sqrt{h_0} - \frac{K}{2}t\right)\right] = 0$$

ist $\tilde{h}$ also in $t = t_*$ differenzierbar mit $\tilde{h}(t_*) = 0$ und somit eine Lösung von (1). Da $\tilde{h}(0) = h(0) = h_0$, ist auch die Anfangsbedingung erfüllt.



Beispiel:

$K = 0.173, \qquad h_0 = 25,$

entspricht etwa einem Fass mit 16 cm Durchmesser und einem Ausfluss mit 1 cm Durchmesser.

(d) Wir stellen nun nicht die Anfangsbedingung $h(0) = h_0$, sondern $h(T) = 0$ für ein gegebenes $T > 0$, d.h.

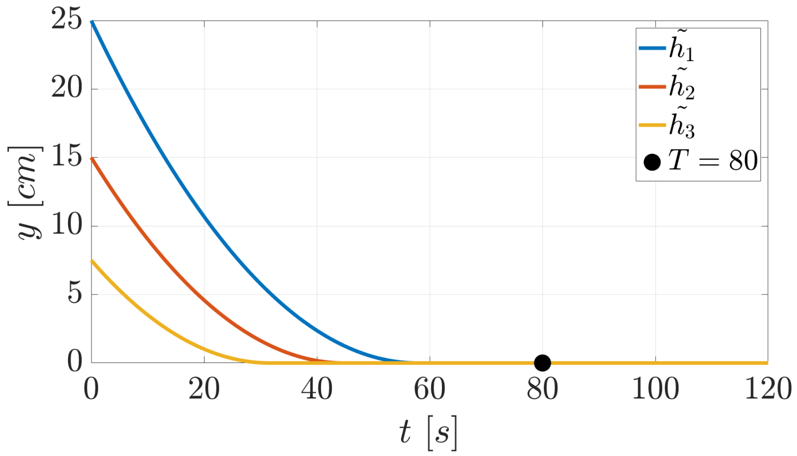
$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \qquad h(T) = 0. \tag{2}$$

Wie viele Lösungen hat dieses Problem?

Lösung: Die Nullfunktion ist eine Lösung. Außerdem ist jede Funktion $\tilde{h}$ wie in Teil (c) eine Lösung, sofern $t_* \leq T$ gilt. Für alle h_0 mit

$$0 < h_0 \leq \left(\frac{K}{2}T\right)^2$$

löst das entsprechende $\tilde{h}$ das Problem (2). Es gibt also unendlich viele Lösungen.



Problem (2) mit

$$K = 0.173, \qquad T = 80.$$

Die Lösung ist nicht eindeutig.

Anschaulich beutet dies: Befindet sich zu einem Zeitpunkt $t > 0$ noch Wasser im Fass, können wir eindeutig sagen, wie viel Wasser zuvor im Fass war und wie viel Wasser später im Fass sein wird. Ist das Fass leer, können wir nicht mehr sagen, wie viel Wasser im Fass war oder seit wann es leer ist.

Wir werden später sehen, dass die Nicht-Eindeutigkeit der Lösung damit zusammenhängt, dass die Funktion $f(h) = \sqrt{h}$ in $h = 0$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 2: Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 6y + 3x^2y^2 = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}, \qquad x > 0,$$

indem Sie den Ansatz $y(x) = cx^\alpha$ verwenden. Dabei sind $c, \alpha \in \mathbb{R}$ geeignet zu bestimmenden Parameter.

Lösung: Mit diesem Ansatz ergibt sich

$$-2x^{-3} - 3x^{-2} \;=\; y' - 6y + 3x^2y^2 \;=\; c\alpha x^{\alpha-1} - 6cx^\alpha + 3c^2x^{2\alpha+2}.$$

Zunächst müssen wir die Potenz α geeignet wählen. Dabei kommen auf der linken Seite nur die Potenzen -2 und -3 vor, auf der rechten aber die drei Potenzen $\alpha - 1,\ \alpha,\ 2\alpha + 2$. Also müssen zwei von diesen gleich sein. Da $\alpha \neq \alpha - 1$, muss also entweder $\alpha = 2\alpha + 2$, oder $\alpha - 1 = 2\alpha + 2$ gelten.

Im ersten Fall erhalten wir

$$\alpha = 2\alpha + 2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = -2, \quad \alpha - 1 = -3,$$

was zu den Potenzen auf der linken Seite passt. Der andere Fall würde $\alpha = -3,\ \alpha - 1 = -4$ ergeben, was nicht zu einer Lösung führt.

Mit $\alpha = -2$ erhalten wir also

$$-2x^{-3} - 3x^{-2} \;=\; -\,2cx^{-3} - 6cx^{-2} + 3c^2x^{-2} \;=\; -\,2cx^{-3} + (3c^2 - 6c)x^{-2}$$

und Koeffizientenvergleich liefert $c = 1$, also $y(x) = x^{-2}$.