Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Wir betrachten ein mit Wasser gefülltes zylinderförmiges Fass, sodass das Wasser durch eine kreisförmige Öffnung am Boden des Fasses ausfließt. Die Höhe des Wasserstandes im Fass bezeichnen wir mit h. Unter vereinfachten Annahmen (keine Reibung, keine Wirbel im Wasser, ...) lässt sich h durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \tag{1}$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist, die vom Durchmesser des Fasses, dem Durchmesser der Öffnung und der Gravitationskonstante abhängt.

(a) Lösen Sie für gegebene $K > 0$ und $h_0 > 0$ das Anfangswertproblem

$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \qquad h(0) = h_0$$

durch Trennung der Variablen.

Berechnen Sie die Zeit t_*, für die $h(t_*) = 0$ gilt.

(b) Ist die Lösung der Anfangswertaufgabe aus Teil (a) für $t > t_*$ definiert?

(c) Sei h die Lösung der Anfangswertaufgabe aus Teil (a) und $h(t_*) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{h} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$,

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{für } 0 \le t \le t_*, \\ 0 & \text{für } t > t_*, \end{cases}$$

eine Lösung der Anfangswertaufgabe ist. Zeigen Sie hierzu insbesondere, dass $\tilde{h}$ für alle $t > 0$ differenzierbar ist.

(d) Wir stellen nun nicht die Anfangsbedingung $h(0) = h_0$, sondern $h(T) = 0$ für ein gegebenes $T > 0$, d.h.

$$h'(t) = -K\sqrt{h(t)}, \qquad h(T) = 0. \tag{2}$$

Wie viele Lösungen hat dieses Problem?

Aufgabe 2: Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - 6y + 3x^2y^2 = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}, \qquad x > 0,$$

indem Sie den Ansatz $y(x) = cx^\alpha$ verwenden. Dabei sind $c, \alpha \in \mathbb{R}$ geeignet zu bestimmenden Parameter.

Abgabe: Bis 15. November 2024