Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 1 - Lösungen

Wir betrachten eine Population von Fischen im Meer, die wir zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $y(t)$ bezeichnen. Wir nehmen als ersten (grob unrealistischen) Schritt an, dass den Fischen unbegrenzte Mengen an Nahrung und Platz zur Verfügung stehen und sie nicht durch äußere Faktoren (Raubtiere, Fischfang, etc) beeinflusst werden. Dann ändert sich die Anzahl der Fische nur durch natürliche Geburten und Tode.

Wir nehmen an, dass es jeweils eine konstante Geburtenrate $m \in [0,1]$ und eine konstante Todesrate $n \in [0,1]$ gibt. Für einen kleinen Zeitschritt $\Delta t > 0$ können wir die Entwicklung der Population beschreiben durch

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t \, (m \cdot y(t) - n \cdot y(t))\,. \tag{1}$$

(a) Leiten Sie hieraus eine gewöhnliche Differentialgleichung her. Lösen Sie das zugehöre Anfangswertproblem mit Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass mit der *Reproduktionsrate*

$$r := m - n, \qquad r \in [-1, 1],$$

für die Lösung y des Anfangswertproblems gilt:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } r > 0, \\ y_0 & \text{für } r = 0, \\ 0 & \text{für } r < 0. \end{cases}$$

Lösung. Unter der Annahme, dass y differenzierbar ist, erhalten wir aus (1):

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = (m-n)y(t).$$

Im Grenzübergang $\Delta t \to 0$ ergibt sich

$$y'(t) = (m-n)y(t) = ry(t).$$

Das Anfangswertproblem $y' = ry, y(0) = y_0 > 0$ hat die Lösung

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

und die Behauptung folgt direkt aus dem Verhalten der Exponentialfunktion.

Als nächstes nehmen wir nun an, dass in jeder Zeiteinheit eine konstante Anzahl $k > 0$ von Fischen gefangen wird. Das zugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t) - k & \text{für } t > 0, \\ y(0) = y_0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(b) Lösen sie dieses Anfangswertproblem.

Lösung. Mit $A(t) = rt$ und $b(t) = -k$ ergibt sich aus der Lösungsformel für das Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^{rt}\left[\int_0^t \mathrm{e}^{-rs}(-k)\ \mathrm{d}s + y_0\right] = y_0\mathrm{e}^{rt} + \frac{k}{r}\mathrm{e}^{rt}\cdot \mathrm{e}^{-rs}\Big|_0^t \\ &= y_0\mathrm{e}^{rt} + \frac{k}{r}\mathrm{e}^{rt}\left(\mathrm{e}^{-rt} - 1\right) \\ &= \left(y_0 - \frac{k}{r}\right)\mathrm{e}^{rt} + \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

(c) Untersuchen Sie, abhängig von k, r und y_0, ob die Population wächst oder fällt. Kann es vorkommen, dass die Population konstant bleibt?

Können negative Werte von y auftreten? Wie wären diese ggf. zu interpretieren?

Lösung. Für $r > 0$ und $k < ry_0$ ist $\left(y_0 - \frac{k}{r}\right)\mathrm{e}^{rt}$ positiv und wächst für $t \to \infty$ unbeschränkt. Dies ist der Fall, wenn die Anzahl der gefangenen Fische k kleiner ist als die Reproduktion der Ursprungspopulation (ry_0).

Für $r > 0$ und $k > ry_0$ ist $\left(y_0 - \frac{k}{r}\right)\mathrm{e}^{rt}$ negativ geht für $t \to \infty$ monoton gegen $-\infty$. Die Population fällt also, und für hinreichend großes t wird $y(t)$ negativ. Rein mathematisch ist das kein Problem, aber Populationen kleiner als Null sind biologisch nicht sinnvoll und das Modell liefert in diesem Fall keine sinnvolle Beschreibung des realen Sachverhalts mehr.

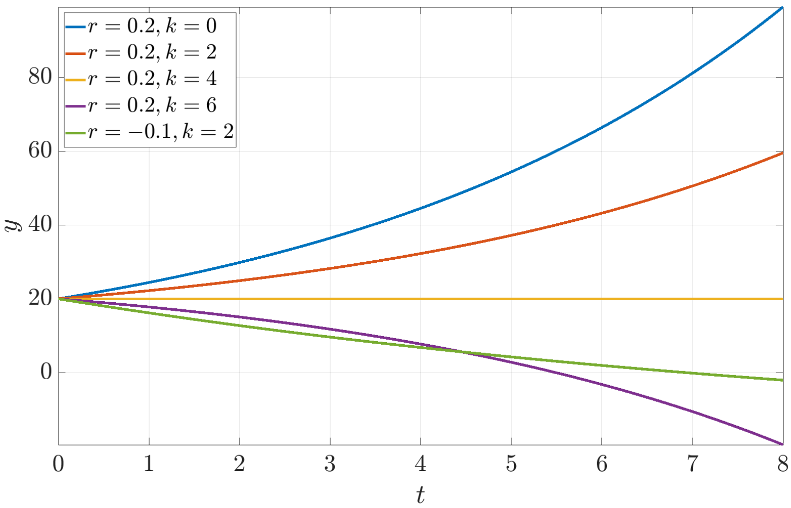
Für $r < 0$ schreiben wir $r = -|r|$, womit wir

$$y(t) = \underbrace{\left(y_0 + \frac{k}{|r|}\right)\mathrm{e}^{-|r|t}}_{\to 0} - \frac{k}{|r|}$$

erhalten. Wir sehen, dass y für alle $k > 0$ fällt und für hinreichend große t negative Werte annimmt.

Falls $ry_0 = k$, so bleibt die Population konstant auf dem Wert k/r.

(d) Skizzieren Sie die Lösungen für $y_0 = 20$ mit $r = 0.2$ und $k = 0$, $k = 2$, $k = 4$, $k = 6$, sowie mit $r = -0.1$ und $k = 2$.



(e) Angenommen, es ist $r < 0$. Kann man eine wachsende Population erhalten, indem man in jeder Zeiteinheit eine konstante Anzahl $c > 0$ der Population hinzufügt? Kann sie in diesem Fall unbeschränkt wachsen?

Lösung. Wir betrachten mit $c > 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t) + c & \text{für } t > 0, \\ y(0) = y_0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Dies hat die Lösung

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{c}{r}\right) \mathrm{e}^{rt} - \frac{c}{r}.$$

Da $r < 0$, schreiben wir wieder $r = -|r|$ und somit

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{c}{|r|}\right) \mathrm{e}^{-|r|t} + \frac{c}{|r|}.$$

Wegen

$$y'(t) = -|r| \left(y_0 - \frac{c}{|r|}\right) \mathrm{e}^{-|r|t}$$

sehen wir, dass y wächst, falls $\left(y_0 - \frac{c}{|r|}\right) < 0$, d.h. falls $c > |r|y_0$. Das bedeutet, der konstante Zuwachs c muss größer sein als der Betrag der Abnahme der Ursprungspopulation. Da

$$\left(y_0 - \frac{c}{|r|}\right) \mathrm{e}^{-|r|t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wächst aber y auch in diesem Fall nicht unbeschränkt, sondern bleibt beschränkt durch $c/|r|$.