

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hausaufgabenblatt 1

Wir betrachten eine Population von Fischen im Meer, die wir zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $y(t)$ bezeichnen. Wir nehmen als ersten (zumindest für große t unrealistischen) Schritt an, dass den Fischen unbegrenzte Mengen an Nahrung und Platz zur Verfügung stehen und sie nicht durch äußere Faktoren (Raubtiere, Fischfang, etc) beeinflusst werden. Dann ändert sich die Anzahl der Fische nur durch natürliche Geburten und Tode.

Wir nehmen an, dass es jeweils eine konstante Geburtenrate $m \in [0, 1]$ und eine konstante Todesrate $n \in [0, 1]$ gibt. Für einen kleinen Zeitschritt $\Delta t > 0$ können wir die Entwicklung der Population beschreiben durch

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t (m \cdot y(t) - n \cdot y(t)). \quad (1)$$

- (a) Leiten Sie hieraus eine gewöhnliche Differentialgleichung her. Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangswert $y(0) = y_0 > 0$. Zeigen Sie, dass mit der *Reproduktionsrate*

$$r := m - n, \quad r \in [-1, 1],$$

für die Lösung y des Anfangswertproblems gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } r > 0, \\ y_0 & \text{für } r = 0, \\ 0 & \text{für } r < 0. \end{cases}$$

Als nächstes nehmen wir nun an, dass in jeder Zeiteinheit eine konstante Anzahl $k > 0$ von Fischen gefangen wird. Das zugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} y'(t) = ry(t) - k & \text{für } t > 0, \\ y(0) = y_0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

- (b) Lösen sie dieses Anfangswertproblem.
- (c) Untersuchen Sie, abhängig von k , r und y_0 , ob die Population wächst oder fällt. Kann es vorkommen, dass die Population konstant bleibt? Können negative Werte von y auftreten? Wie wären diese ggf. zu interpretieren?

- (d) Skizzieren Sie die Lösungen für $y_0 = 20$ mit $r = 0.2$ und $k = 0, k = 2, k = 4, k = 6$, sowie mit $r = -0.1$ und $k = 2$.
- (e) Angenommen, es ist $r < 0$. Kann man eine wachsende Population erhalten, indem man in jeder Zeiteinheit eine konstante Anzahl $c > 0$ der Population hinzufügt? Kann sie in diesem Fall unbeschränkt wachsen?