Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 6 - Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie die Ruhelagen der folgenden Differentialgleichungssysteme und prüfen Sie, ob diese instabil, stabil oder asymptotische stabil sind.

(i) $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, (iv) $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(0,0,0)^\top \in \mathbb{R}^3$ eine stabile Ruhelage von $u' = Au$? Dabei sei A jeweils gegeben durch

(i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, (ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, (iii) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Lösung.

(a) (i) Ruhelage:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = (\lambda+4)(\lambda-2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 2.$$

Es gibt also einen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Ruhelage ist *instabil.*

(ii) Ruhelage:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 + \mathrm{i}, \quad \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}.$$

Es gibt einen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Ruhelage ist *instabil.*

(iii) Ruhelage:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) + 10 = \lambda^2 + 9 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = -3\mathrm{i}.$$

Es gibt keinen Eigenwert mit positivem Realteil. Die Eigenwerte mit Realteil Null sind einfach. Die Ruhelage ist *stabil*.

(iv) Ruhelage:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte der Systemmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Alle Eigenwerte haben negativen Realteil. Die Ruhelage ist *asymptotisch stabil*.

(b) (i) Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)((\alpha-\lambda)^2+1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \alpha + \mathrm{i},\ \lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}.$$

Der Nullpunkt ist also ein stabiler Ruhelage, falls $\alpha \le 0$ und sogar asymptotisch stabil für alle $\alpha < 0$.

(ii) Wir sehen sofort, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert ist. Die Ruhelage ist also instabil, unabhängig von α.

(iii) Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)((\alpha-\lambda)^2-1) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = \alpha + 1,\ \lambda_2 = \alpha - 1.$$

Der Nullpunkt ist also ein stabiler Ruhelage, falls $\alpha \le -1$ und sogar asymptotisch stabil für alle $\alpha < -1$.

Aufgabe 2:

(a) (*Alte Klausuraufgabe, 4 Punkte*) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 2\cos(t) + t^2 e^{-2t} \qquad \text{für } \; t > 0,$$

mit

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 5.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich diese Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

(b) Es sei $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$ das Bild der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ unter der Laplace-Transformation. Bestimmen Sie f.

Lösung.

(a) Es sei U das Bild von u unter der Laplace-Transformation. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u \circ\!\!-\!\!\bullet\; U, \qquad u' \circ\!\!-\!\!\bullet\; sU - u(0) \;&=\; sU \\ u'' \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2U - su(0) - u'(0) \;&=\; s^2U - 5. \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir

$$\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+1}, \qquad t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2!}{s^{2+1}}, \qquad t^2 e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2}{(s+2)^3}.$$

Die Anfangswertaufgabe geht also über in die algebraische Gleichung

$$(s^2 + 4s + 3)U - 5 = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}.$$

(b) Wir machen einen Ansatz über Partialbruchzerlegung:

$$\frac{as+b}{s^2+2s+1} + \frac{c}{s} = \frac{1}{s(s+1)^2}.$$

Wir erhalten:

$$cs^2 + 2cs + c + as^2 + bs = 1 \quad \Rightarrow \quad c = -a, \; -2c = b, \; c = 1$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{-s-2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} \;&=\; -\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} \\ &=\; -\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\; -te^{-t} - e^{-t} + 1 \;=\; f(t). \end{aligned}$$