

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 6

Aufgabe 1:

- (a) Bestimmen Sie die Ruhelagen der folgenden Differentialgleichungssysteme und prüfen Sie, ob diese instabil, stabil oder asymptotische stabil sind.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}, & \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, & \text{(iv)} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(0, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$ eine stabile Ruhelage von $u' = Au$? Dabei sei A jeweils gegeben durch

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

- (a) (*Alte Klausuraufgabe, 4 Punkte*) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 2 \cos(t) + t^2 e^{-2t} \quad \text{für } t > 0,$$

mit

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 5.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich diese Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

- (b) Es sei $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ das Bild der Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ unter der Laplace-Transformation. Bestimmen Sie f .