Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 5 - Lösungen

Aufgabe 1: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, sowie die zugehörigen Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für $u' = Au$.

Lösung:

(a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & -3-\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (1-\lambda)(\lambda+2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2 \end{aligned}$$

Berechnung der zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor $v^{[1]}$ zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{2,3} = -2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v^{[2]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Eigenraum hat also die Dimension Eins. Somit die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda_{2,3} = -2$ kleiner als seine algebraische Vielfachheit. Wir brauchen einen Hauptvektor der 2. Stufe, den wir über den Ansatz

$$(A - \lambda_{2,3} I)v^{[3]} = v^{[2]}$$

berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v^{[3]} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Ein Fundamentalsystem lautet damit:

$$u_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_3(t) = e^{-2t} \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2:

(a) Wir betrachten das inhomogene System

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das homogene Problem. Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems durch Variation der Konstanten.

(b) Wir betrachten das inhomogene System

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein *reelles* Fundamentalsystem für das homogene Problem. Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems durch den Ansatz
$u_p(t) = \mathrm{e}^{2t}(a, b)^\top$, mit geeigneten $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung.

(a) Für die Lösung des homogenen Problems bestimmen wir zuerst Eigenwerte und Eigenvektoren.

Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 24 = \lambda^2 - 4\lambda - 21$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+21} = 2 \pm 5 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = -3.$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 7:$

$$\left(\begin{array}{rr|r} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \quad\to\quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -3:$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 6 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad\to\quad \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad\Rightarrow\quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem ist damit $\{\mathrm{e}^{7t}(1,1)^\top,\ \mathrm{e}^{-3t}(-2,3)^\top\}$ und die allgemeine Lösung lautet

$$u_h(t) = c_1\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; c_2\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir können dies auch mithilfe der Fundamentalmatrix schreiben:

$$u_h(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{7t} & -2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{7t} & 3\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Variation der Konstanten führt der Ansatz

$$u_p(t) = K_1(t)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}v^{[1]} \;+\; K_2(t)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}v^{[2]}$$

zu den Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{7t}K_1'(t) - 2\mathrm{e}^{-3t}K_2'(t) &= 0, \\ \mathrm{e}^{7t}K_1'(t) + 3\mathrm{e}^{-3t}K_2'(t) &= 10t\mathrm{e}^{-3t}. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, erhält man

$$5\mathrm{e}^{-3t}K_2'(t) = 10t\mathrm{e}^{-3t} \quad\Rightarrow\quad K_2'(t) = 2t,$$

und wir können $K_2(t) = t^2$ als Stammfunktion wählen.
In der ersten Gleichungen ergibt sich dann

$$\mathrm{e}^{7t}K_1'(t) - 2\mathrm{e}^{-3t}K_2'(t) \;=\; \mathrm{e}^{7t}K_1'(t) - 4\mathrm{e}^{-3t}t \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad K_1'(t) = 4t\mathrm{e}^{-10t}$$

und nach kurzer Rechnung (z.B. mit partieller Integration) erhalten wir

$$K_1(t) = -\frac{1}{25}(10t+1)\mathrm{e}^{-10t}$$

als Stammfunktion. Damit haben wir schließlich

$$\begin{aligned} u_p(t) &= -\frac{1}{25}(10t+1)\mathrm{e}^{-10t}\cdot\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; t^2\cdot\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25\mathrm{e}^{3t}}\begin{pmatrix} -50t^2 - 10t - 1 \\ 75t^2 - 10t - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Für die Lösung des homogenen Problems bestimmen wir zuerst Eigenwerte und Eigenvektoren.

Eigenwerte:

$$p(\lambda) \;=\; \det\begin{pmatrix} -6-\lambda & -4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (-6-\lambda)(2-\lambda)+20 \;=\; \lambda^2+4\lambda+8$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-8} \;=\; 2 \pm 2\mathrm{i} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = -2+2\mathrm{i}, \quad \lambda_2 = -2-2\mathrm{i}.$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = -2+2\mathrm{i}$:

$$\begin{pmatrix} -4-2\mathrm{i} & -4 \\ 5 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{[1]} \\ v_2^{[1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$(-4-2\mathrm{i})v_1^{[1]} - 4v_2^{[1]} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2^{[1]} = (-1-\frac{1}{2}\mathrm{i})v_1^{[1]},$$

sowie

$$5v_1^{[1]} + (4-2\mathrm{i})v_2^{[1]} = 0,$$

was keine weiter Bedingung liefert. Wir wählen

$$v^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad v^{[2]} = \bar{v}^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Ein komplexes Fundamentalsystem ist also gegeben durch

$$\left\{ \mathrm{e}^{(-2-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{(-2+2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ergibt sich aus Realteil und Imaginärteil der ersten komplexen Fundamentallösung:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(-2-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{-2t}(\cos(2t) - \mathrm{i}\sin(2t)) \begin{pmatrix} 2 \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - 2\mathrm{i}\sin(2t) \\ -2\cos(2t) + 2\mathrm{i}\sin(2t) - \mathrm{i}\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -2\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}}_{=:w_1(t)} \;+\; \mathrm{i} \;\cdot\; \underbrace{e^{-2t} \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}}_{=:w_2(t)}, \end{aligned}$$

und $\{w_1, w_2\}$ ist ein reelles Fundamentalsystem.

Mit dem Ansatz $u_p(t) = \mathrm{e}^{2t}(a,b)^\top$, ergibt sich

$$u_p' = 2\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;\stackrel{!}{=}\; \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;+\; \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt $8a + 4b = 2$ und $-5a = -5$, also $a = 1$ und $b = -\frac{3}{2}$.