Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 4 - Lösungen

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $u'''(t) - u'(t) = 0\,;$

(b) $u'''(t) - 5u''(t) + 8u'(t) - 4u(t) = 0\,;$

(c) $u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 0\,.$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = +1$. Die Funktionen $u_k(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}$ mit $1 \le k \le 3$, bilden ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist also

$$u(t) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-t} + c_3\mathrm{e}^{t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4.$$

Da die Koeffizienten sich zu Null summieren, ist $\lambda = 1$ eine Nullstelle. Durch Polynomdivision erhalten wir dann

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Wir haben also $\lambda = 2$ als doppelte Nullstelle. Damit bilden die Funktionen

$$u_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \quad u_2(t) = \mathrm{e}^{2t}, \quad u_3(t) = t\mathrm{e}^{2t}$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung hat die Form

$$u(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{2t} + c_3t\mathrm{e}^{2t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(c) Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Dieses hat die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} \; = \; 1 \pm \sqrt{1-5} \; = \; 1 \pm 2\mathrm{i}.$$

Wir erhalten dann ein reelles Fundamentalsystem durch $u_1(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_1 t})$ und $u_2(t) = \mathrm{I}m(\mathrm{e}^{\lambda_1 t})$. Es gilt mithilfe der Eulerschen Identität:

$$\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^t(\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)) \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = \mathrm{e}^t\cos(2t), \quad u_2(t) = \mathrm{e}^t\sin(2t).$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$u(t) = \mathrm{e}^t \cdot (c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (*alte Klausuraufgabe, 4 Punkte)*: Gegeben ist die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung

$$u'''(t) + a_2u''(t) + a_1u'(t) + a_0u(t) = 0 \tag{$*$}$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie für jede der folgenden Mengen von Funktionen, ob sie (bei geeigneten Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung sein können. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $M_1 := \{u_1(t) = -t,\ u_2(t) = 1,\ u_3(t) = 2t\}$.

(b) $M_2 := \{u_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ u_2(t) = \mathrm{e}^t,\ u_3(t) = \mathrm{e}^{2t},\ u_4(t) = \mathrm{e}^{3t}\}$.

(c) $M_3 := \{u_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ u_2(t) = e^{\mathrm{i}t},\ u_3(t) = e^{2\mathrm{i}t}\}$.

(d) $M_4 := \{u_1(t) = 1,\ u_2(t) = e^{-2\mathrm{i}t},\ u_3(t) = e^{2\mathrm{i}t}\}$

Lösung:

(a) Die Menge M_1 kann kein Fundamentalsystem sein, denn sie ist nicht linear unabhängig. Es gilt zum Beispiel: $u_3(t) + 0 \cdot u_2(t) + 2u_1(t) = 0$. Der durch die Funktionen aus M_1 aufgespannte Raum hat nur die Dimension zwei.

(b) Da der Lösungsraum die Dimension drei hat, kann M_2 kein Fundamentalsystem für (**??**) sein. Der durch die Funktionen aus M_2 aufgespannte Raum hat die Dimension vier.

(c) Komplexe Lösungen linearer Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten tauchen immer paarweise konjugiert komplex auf! Daher kann M_3 kein Fundamentalsystem für (**??**) sein.

(d) Die Menge M_4 ist ein Fundamentalsystem für (**??**) mit passenden Koeffizienten.

Nicht in der Aufgabe verlangt: Das charakteristische Polynom wäre $p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 4)$, die Differentialgleichung also $u'''(t) + 4u'(t) = 0$.

Aufgabe 3: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (2+\lambda)(4+\lambda) - 3 \;=\; \lambda^2 + 6\lambda + 5 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -5. \end{aligned}$$

Eigenvektoren:

zu $\lambda_1 = -1$: $\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_2 = -5$: $\left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung des Systems ist mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \;=\; c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aus den Anfangsdaten ergibt sich

$$c_1 + c_2 = 3, \quad c_1 - 3c_2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{11}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}$$

und daher schließlich als Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \;=\; \frac{11}{4}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;+\; \frac{1}{4}e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$