Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 3 - Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Wir betrachten die Gleichung

$$y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0 \qquad \text{für} \quad t > 0.$$

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $y_1(t) := c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) := c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, Lösungen dieser Gleichung sind. Ist $y_1 + y_2$ auch eine Lösung?

(b) Sei nun die *Eulersche Differentialgleichung*

$$t^2 u''(t) - 7tu'(t) + 15u(t) = 0 \qquad \text{für} \quad t > 0$$

gegeben. Lösen Sie diese Gleichung, indem Sie sie durch eine geeignete Substitution auf die Gleichung aus Teil (a) zurückführen.

Lösung:

(a) Sei y eine Lösung der Form $y(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$ mit $c, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda^2 c\mathrm{e}^{\lambda t} - 8\lambda c\mathrm{e}^{\lambda t} + 15c\mathrm{e}^{\lambda t} \;=\; (\lambda^2 - 8\lambda + 15)c\mathrm{e}^{\lambda t} \;=\; 0.$$

Für $c = 0$ erhalten wir eine Lösung. Für $c \neq 0$ ist $c\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t > 0$ und somit folgt

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 5.$$

Somit sind $y_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{3t}$ und $y_2(t) = c_2 \mathrm{e}^{5t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Lösungen. Da die Gleichung linear ist, ist auch $y_1 + y_2$ eine Lösung.

(b) Wir setzen $\mathrm{e}^s := t$ und $y(s) := u(\mathrm{e}^s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &y'(s) = \mathrm{e}^s u'(\mathrm{e}^s) \quad \Rightarrow \quad u'(t) = u'(\mathrm{e}^s) = \mathrm{e}^{-s} y'(s), \\ &y''(s) = \mathrm{e}^s u'(\mathrm{e}^s) + \mathrm{e}^{2s} u''(\mathrm{e}^s) \quad \Rightarrow \quad u''(t) = u''(\mathrm{e}^s) = \mathrm{e}^{-2s}(y''(s) - y'(s)). \end{aligned}$$

Damit haben wir in der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; t^2u''(t) - 7tu'(t) + 15u(t) \;&=\; t^2 \cdot t^{-2}(y''(s) - y'(s)) - 7t \cdot t^{-1}y'(s) + 15y(s) \\ &=\; y''(s) - 8y'(s) + 15y(s). \end{aligned}$$

In Teil (a) haben wir gesehen, dass die Gleichung für y die Lösung

$$y(s) = c_1\mathrm{e}^{3s} + c_2\mathrm{e}^{5s}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

hat. Mit der Rücktransformation $s = \ln(t)$ erhalten wir

$$u(t) = c_1t^3 + c_2t^5.$$

Aufgabe 2: (*Alte Klausuraufgabe, 5 Punkte*)

(a) Prüfen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ob sie exakt sind.

  (i) $y(t)^2 + (t^2y(t) - 1)y'(t) = 0\,;$

  (ii) $2ty(t)^2 + (2y(t) + 2t^2y(t))y'(t) = 0\,.$

(b) Bestimmen Sie für die exakte Differentialgleichung aus Teil (a) ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

Lösung.

(a) (i) Die Gleichung hat die Form $f(t,y) + g(t,y)y'(t) = 0$ mit $f(t,y) = y^2$ und $g(t,y) = t^2y - 1$. Es gilt

$$f_y(t,y) \;=\; 2y \;\neq\; 2ty \;=\; g_t(t,y),$$

also ist die Gleichung nicht exakt.

(ii) Die Gleichung hat die Form $f(t,y) + g(t,y)y'(t) = 0$ mit $f(t,y) = 2ty^2$ und $g(t,y) = 2(t^2+1)y$. Es gilt

$$f_y(t,y) \;=\; 4ty \;=\; g_t(t,y),$$

also ist die Gleichung exakt.

(b) Wir bestimmen ein Potential für die Gleichung aus (a).(ii):

$$\begin{aligned} \Psi_t(t,y) = f(t,y) = 2ty^2 \quad &\Rightarrow \quad \Psi(t,y) = t^2y^2 + D(y), \\ \Psi_y(t,y) = g(t,y) = 2(t^2+1)y \quad &\Rightarrow \quad \Psi(t,y) = (t^2+1)y^2 + K(t). \end{aligned}$$

Wir wählen $K(t) = 0$ und $D(y) = y^2$. Damit ist also $\Psi(t,y) = (t^2+1)y^2$.

Die Lösungen der Differentialgleichung sind gegeben durch $\Psi(t,y) = C$, d.h.

$$C = (t^2+1)y^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \pm\sqrt{\frac{C}{t^2+1}}, \quad C > 0.$$

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(t^2-1)y + (t^3+t)y' = 0, \qquad t > 0,$$

einen integrierenden Faktor h besitzt, der nur von t abhängt (d.h. $h = h(t)$) und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung.

Lösung: Mit $f(t,y) = (t^2-1)y$, $g(t,y) = t^3+t$ ist

$$f_y = t^2 - 1 \;\neq\; 3t^2+1 = g_t,$$

also ist die Gleichung nicht exakt.

Damit $h(t)$ ein integrierender Faktor ist, muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h(t)\cdot f(t,y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(h(t)\cdot g(t,y)\right).$$

Wir haben

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h(t)\cdot f(t,y)\right) = h(t)\cdot f_y(t,y) = h(t)\cdot (t^2-1)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(h(t)\cdot g(t,y)\right) &= h'(t)\cdot g(t,y) + h(t)\cdot g_t(t,y)\\ &= h'(t)\cdot (t^3+t) + h(t)\cdot(3t^2+1).\end{aligned}$$

Zusammen also:

$$\begin{aligned}&h(t)\cdot(t^2-1) = h'(t)\cdot(t^3+t) + h(t)\cdot(3t^2+1)\\ &\qquad\Rightarrow\quad h'(t)\cdot(t^3+t) = -2(t^2+1)h(t) \quad\Rightarrow\quad h'(t) = -\frac{2}{t}h(t).\end{aligned}$$

Trennung der Variablen liefert $h(t) = \frac{1}{t^2}$ als eine Lösung. Damit ist

$$0 \;=\; h(t)\cdot y(t^2-1) + h(t)\cdot(t^3+t)y' \;=\; \left(1-\frac{1}{t^2}\right)y + \left(t+\frac{1}{t}\right)y'.$$

Hier ergibt sich direkt, dass

$$\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)y\ \mathrm{d}t \;=\; \left(t+\frac{1}{t}\right)y \;=\; \int\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}y,$$

also ist $\Psi(t,y) = (t+1/t)y$ ein zugehöriges Potential und die Lösungen sind gegeben durch

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)y \;=\; C \qquad\Rightarrow\qquad y(t) \;=\; \frac{C}{t+\frac{1}{t}} \;=\; \frac{Ct}{t^2+1}.$$