

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 3

Aufgabe 1:

- (a) Wir betrachten die Gleichung

$$y''(t) - 8y'(t) + 15y(t) = 0 \quad \text{für } t > 0.$$

Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $y_1(t) := c_1 e^{\lambda_1 t}$ und $y_2(t) := c_2 e^{\lambda_2 t}$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, Lösungen dieser Gleichung sind. Ist $y_1 + y_2$ auch eine Lösung?

- (b) Sei nun die *Eulersche Differentialgleichung*

$$t^2 u''(t) - 7t u'(t) + 15u(t) = 0 \quad \text{für } t > 0$$

gegeben. Lösen Sie diese Gleichung, indem Sie sie durch eine geeignete Substitution auf die Gleichung aus Teil (a) zurückführen.

Aufgabe 2: (Alte Klausuraufgabe, 5 Punkte)

- (a) Prüfen Sie für die folgenden Differentialgleichungen jeweils ob sie exakt sind.

(i) $y(t)^2 + (t^2 y(t) - 1)y'(t) = 0$;

(ii) $2ty(t)^2 + (2y(t) + 2t^2 y(t))y'(t) = 0$.

- (b) Bestimmen Sie für die exakte Differentialgleichung aus Teil (a) ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$(t^2 - 1)y + (t^3 + t)y' = 0, \quad t > 0,$$

einen integrierenden Faktor h besitzt, der nur von t abhängt (d.h. $h = h(t)$) und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung.