Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 2 - Lösungen

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) - 2y(x) = 1 + 4\mathrm{e}^{-2x}, \qquad y(0) = 1.$$

Lösung: In Standardform lautet die Differentialgleichung

$$y'(x) = 2y(x) + 1 + 4\mathrm{e}^{-2x},$$

d.h. wir haben eine lineare, inhomogene Gleichung erster Ordnung mit

$$a(x) = 2, \qquad b(x) = 1 + 4\mathrm{e}^{-2x}.$$

Wir wählen $A(x) = 2x$ als Stammfunktion von a und erhalten aus der Lösungsformel:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathrm{e}^{A(x)} \left[\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-A(s)} b(s) \ \mathrm{d}s + y_0 \mathrm{e}^{-A(x_0)} \right] = \mathrm{e}^{2x} \left[\int_0^x \mathrm{e}^{-2s} \left(1 + 4\mathrm{e}^{-2s}\right) \ \mathrm{d}s + 1 \right] \\
&= \mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-2s} \ \mathrm{d}s + 4\mathrm{e}^{2x} \int_0^x \mathrm{e}^{-4s} \ \mathrm{d}s + \mathrm{e}^{2x} \\
&= \mathrm{e}^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-2s} \right) \Big|_0^x + 4\mathrm{e}^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{4} \mathrm{e}^{-4s} \right) \Big|_0^x + \mathrm{e}^{2x} \\
&= -\frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} \left(\mathrm{e}^{-2x} - 1 \right) - \mathrm{e}^{2x} \left(\mathrm{e}^{-4x} - 1 \right) + \mathrm{e}^{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} \\
&= -\mathrm{e}^{-2x} + \frac{5}{2} \mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

$$(a)\ \ y' = x^2 y, \qquad (b)\ \ y' = xy^2, \qquad (c)\ \ y' = (1-\sin(x))y, \qquad (d)\ \ y' = \frac{x\cos^2(y)}{1+x^2}.$$

Lösung:

(a) Eine Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2 \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{1}{3}x^3 + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}, \\ &\Rightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot \mathrm{e}^{x^3/3} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\mathrm{e}^{x^3/3}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Eine Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + c \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{c - \frac{x^2}{2}}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Eine Lösung ist $y = 0$. Für $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-\sin(x))y \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int (1-\sin(x))\ \mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \ln(|y|) = x + \cos(x) + \tilde{c}, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad |y| = \mathrm{e}^{\tilde{c}} \cdot \mathrm{e}^{x+\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = c\mathrm{e}^{x+\cos(x)}, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Für $k \in \mathbb{Z}$ und die konstante Funktion $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ist $\cos^2(y) = 0$ und $y' = 0$, d.h. diese y lösen die Differentialgleichung. Ansonsten gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\cos^2(y)}{1+x^2} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\cos^2(y)}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \tan(y) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c \\ &\Rightarrow \quad y(x) = \arctan\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c\right), \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Damit ist $y(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $\cos^2(y) \neq 0$.

Die Funktion $\cos^2(y)$ ist π-periodisch, d.h. $\cos^2(y + k\pi) = \cos^2(y)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y(x) + k\pi) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$, d.h. zu jeder Lösung y ist auch $y + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Lösung.

Aufgabe 3: Lösen Sie das Anfangswertproblem für folgende *Bernoullische* Differentialgleichung:

$$u' = \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}u^4 \qquad \text{für} \quad t > 0, \qquad u(0) = 1.$$

Ist die Lösung für alle $t > 0$ definiert?

Lösung: Wir haben eine Bernoullische Gleichung mit $a = b = \frac{1}{3}$ und $\alpha = 4$. Die Substitution $y(t) := u^{1-\alpha}(t) = u^{-3}(t)$ liefert dann

$$y(t)' = (1-\alpha)\,[a(t)y(t) + b(t)] = -3\left[\frac{1}{3}y(t) + \frac{1}{3}\right] = -y(t) - 1,$$

sowie $y(0) = u^{-3}(0) = 1$.

Mit der Lösungsformel für lineare Probleme erster Ordnung können wir dann berechnen:

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left[\int_0^t \mathrm{e}^s \cdot (-1)\,\mathrm{d}s + 1\right] = \mathrm{e}^{-t}\left[-(\mathrm{e}^t - 1) + 1\right] = 2\mathrm{e}^{-t} - 1.$$

Jetzt müssen wir diese Lösung wieder zurück transformieren:

$$y = u^{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad u = y^{\,-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}},$$

also

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\mathrm{e}^{-t} - 1}}.$$

Die Lösung ist nur für $2\mathrm{e}^{-t} - 1 \neq 0$ definiert, d.h. für $t < \ln(2)$.