Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 1 - Lösungen

Aufgabe 1:

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t) - t \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung?

(1) $u_1(t) := \mathrm{e}^t$, (2) $u_2(t) := t + 1$,
(3) $u_3(t) := \alpha\mathrm{e}^t + t + 1$, (4) $u_4(t) := \mathrm{e}^t + \beta(t+1)$,

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten seien.

(b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(t) + 16y(t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$y_1(t) := \cos(4t), \qquad y_2(t) := \sin(4t), \qquad y_3(t) := \alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Lösungen sind.

Hat das Anfangswertproblem $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 0$, eine eindeutige Lösung?

Lösung:

(a) Wir rechnen direkt nach:

(1) $u_1'(t) = e^t \ \neq\ e^t - t = u_1(t) - t$, also ist u_1 *keine* Lösung.
(2) $u_2'(t) = 1 \ =\ (1+t) - t = u_2(t) - t$, also ist u_2 eine Lösung.
(3) $u_3'(t) = \alpha\mathrm{e}^t + 1 \ =\ u_3(t) - t$, also ist u_3 eine Lösung.
(4) $u_4'(t) = \mathrm{e}^t + \beta,\ u_4(t) - t = \mathrm{e}^t + (\beta-1)t + \beta$, also ist u_4 nur für $\beta = 1$ eine Lösung.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(4t), & y_1'(t) &= -4\sin(4t), & y_1''(t) &= -16\cos(4t),\\ y_2(t) &= \sin(4t), & y_2'(t) &= 4\cos(4t), & y_2''(t) &= -16\sin(4t), \end{aligned}$$

also gilt $y_1'' + 16y_1 = 0$ und $y_2'' + 16y_2 = 0$.

Aufgrund der Linearität der Ableitung erhalten wir auch

$$y_3''(t) = -16\alpha\cos(4t) - 16\beta\sin(4t) = -16y_3(t).$$

Die Linearkombination zweier Lösungen ist wieder eine Lösung, da die Gleichung linear ist!

Wählen wir $\alpha = 0$, so erfüllt für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ die Funktion $y(t) = \beta\sin(4t)$ sowohl die Differentialgleichung, als auch die Bedingung $y(0) = 0$. Das liegt daran, dass dies eine Gleichung zweiter Ordnung ist. Für Gleichungen höherer Ordnung brauchen wir i.A. mehr Bedingungen.

Aufgabe 2: Wir bezeichnen die Feuchtigkeit eines Tuchs in einem Trockner zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(t)$ und es sei $m_0 := m(0) > 0$. Angenommen, es gilt:

- Beim Trocknen ist die Abnahme der Feuchtigkeit proportional zur Feuchtigkeit.
- Nach 15 Minuten hat das Tuch noch $50\,\%$ seiner ursprünglichen Feuchtigkeit m_0.

Stellen Sie eine geeignete Differentialgleichung auf, die diesen Prozess beschreibt und bestimmen Sie deren Lösung. Wie lange dauert es, bis das Tuch nur noch $2\,\%$ seiner ursprünglichen Feuchtigkeit hat?

Lösung: Aus der ersten Annahme folgt, dass wir m beschreiben können durch

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda m, \qquad m(0) = m_0.$$

Da wir davon ausgehen, dass die Feuchtigkeit abnimmt, wählen wir $\lambda > 0$.

Dieses Problem hat die Lösung

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Um λ zu bestimmen verwenden wir die zweite Bedingung:

$$0.5m_0 \;=\; m(15) \;=\; m_0\mathrm{e}^{-15\lambda} \quad\Rightarrow\quad 0.5 \;=\; \mathrm{e}^{-15\lambda} \quad\Rightarrow\quad \lambda \;=\; -\frac{\ln(0.5)}{15} \;\approx\; 0.046.$$

Sei t_* der Zeitpunkt, an dem das Tuch nur noch $2\,\%$ seiner ursprünglichen Feuchtigkeit hat. Dann gilt also

$$\begin{aligned} m(t_*) \;&=\; 0.02m_0 \;=\; m_0\exp\left(\frac{\ln(0.5)}{15}t_*\right) \\ \Rightarrow\quad \ln(0.02) \;&=\; \frac{\ln(0.5)}{15}t_* \quad\Rightarrow\quad t_* = 15\cdot\frac{\ln(0.02)}{\ln(0.5)} \;\approx\; 84.66. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(u) := (1-u)u.$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $c \in \mathbb{R}$ die Funktion φ_c, definiert durch

$$\varphi_c(t) := \frac{e^t}{e^t + c},$$

eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi_c' = f(\varphi_c)$ für $t \geq 0$ ist, solange $e^t + c > 0$.

(b) Sei nun ein Anfangswert $u(0) = u_0 > 0$ gegeben. Wie muss man das c aus Teil (a) wählen, damit $u(t) = \varphi_c(t)$ das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$ löst? Wie sehen die Lösungen für $u_0 = 0$ und für $u_0 = 1$ aus?

(c) Sind die Lösungen aus (b) mit $u_0 > 0$ für alle $t > 0$ definiert? D.h. ist die Bedingung $e^t + c > 0$ für alle $t > 0$ erfüllt?

(d) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$ für $u_0 = \frac{1}{2}$ und für $u_0 = \frac{3}{2}$. Skizzieren Sie diese Lösungen.

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\varphi_c'(t) = \frac{e^t(e^t + c) - e^t \cdot e^t}{(e^t + c)^2} = \frac{ce^t}{(e^t + c)^2}.$$

Außerdem haben wir

$$f(\varphi_c(t)) = \varphi_c(t) - \varphi_c^2(t) = \frac{e^t(e^t + c)}{(e^t + c)^2} - \left(\frac{e^t}{e^t + c}\right)^2 = \frac{ce^t}{(e^t + c)^2}.$$

Also gilt $\varphi_c'(t) = f(\varphi_c(t))$.

(b) Sei $u_0 > 0$. Damit $\varphi_c(t)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem löst, muss gelten

$$u_0 = \varphi_c(0) = \frac{e^0}{e^0 + c} = \frac{1}{1 + c},$$

was erfüllt ist für

$$c = \frac{1 - u_0}{u_0}.$$

Für $u_0 = 1$ erhalten wir $c = 0$ und somit die konstante Lösung $u = 1$.

Für $u_0 = 0$ liefert der obige Ansatz keine Lösung. Aber die Funktion $u = 0$ erfüllt die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung $u(0) = 0$.

(c) Wir haben

$$c = \frac{1 - u_0}{u_0} = \frac{1}{u_0} - 1.$$

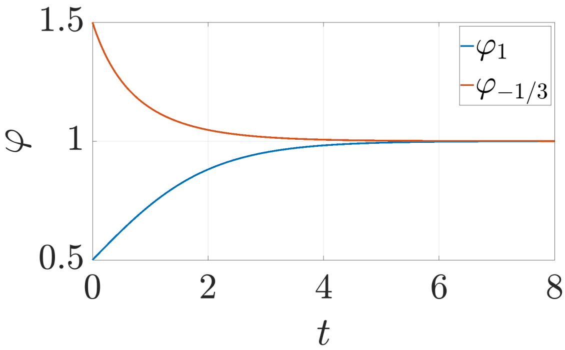
Wegen $u_0 > 0$ ist also $c > -1$ und da $e^t > 1$ für $t > 0$, gilt $e^t + c > 0$.

(d) Für $u_0 = \frac{1}{2}$ haben wir $c = 1$ und somit

$$\varphi_1(t) = \frac{e^t}{e^t + 1}.$$

Für $u_0 = \frac{3}{2}$ haben wir $c = -\frac{1}{3}$ und somit

$$\varphi_{-\frac{1}{3}}(t) = \frac{e^t}{e^t - \frac{1}{3}}.$$



Wir können für beliebiges $u_0 > 0$, und $c = (1 - u_0)/u_0$ schreiben:

$$u(t) = \varphi_c(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{e^t + c} = \frac{1}{1 + c\mathrm{e}^{-t}}$$

und wegen

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$$

folgt

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 1,$$

unabhängig vom Anfangswert u_0!