Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2024/25**
Prof. Dr. T. Schmidt, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Präsenzblatt 1

Aufgabe 1:

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t) - t \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Welche der folgenden auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung?

(1) $u_1(t) := \mathrm{e}^t$, (2) $u_2(t) := t + 1$,
(3) $u_3(t) := \alpha \mathrm{e}^t + t + 1$, (4) $u_4(t) := \mathrm{e}^t + \beta(t + 1)$,

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten seien.

(b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(t) + 16y(t) = 0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$y_1(t) := \cos(4t), \qquad y_2(t) := \sin(4t), \qquad y_3(t) := \alpha\cos(4t) + \beta\sin(4t)$$

für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Lösungen sind.

Hat das Anfangswertproblem $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 0$ eine eindeutige Lösung?

Aufgabe 2: Wir bezeichnen die Feuchtigkeit eines Tuchs in einem Trockner zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(t)$ und es sei $m_0 := m(0) > 0$. Angenommen, es gilt:

- Beim Trocknen ist die Abnahme der Feuchtigkeit proportional zur Feuchtigkeit.
- Nach 15 Minuten hat das Tuch noch $50\,\%$ seiner ursprünglichen Feuchtigkeit m_0.

Stellen Sie eine geeignete Differentialgleichung auf, die diesen Prozess beschreibt und bestimmen Sie deren Lösung. Wie lange dauert es, bis das Tuch nur noch $2\,\%$ seiner ursprünglichen Feuchtigkeit hat?

Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(u) := (1 - u)u.$$

(a) Zeigen Sie, dass mit $c \in \mathbb{R}$ die Funktion φ_c, definiert durch

$$\varphi_c(t) := \frac{e^t}{e^t + c},$$

eine Lösung der Differentialgleichung $\varphi_c' = f(\varphi_c)$ für $t \geq 0$ ist, solange $e^t + c > 0$.

(b) Sei nun ein Anfangswert $u(0) = u_0 > 0$ gegeben. Wie muss man das c aus Teil (a) wählen, damit $u(t) = \varphi_c(t)$ das Anfangswertproblem $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$ löst? Wie sehen die Lösungen für $u_0 = 0$ und für $u_0 = 1$ aus?

(c) Sind die Lösungen aus (b) mit $u_0 > 0$ für alle $t > 0$ definiert? D.h. ist die Bedingung $e^t + c > 0$ für alle $t > 0$ erfüllt?

(d) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems $u' = f(u)$, $u(0) = u_0$ für $u_0 = \frac{1}{2}$ und für $u_0 = \frac{3}{2}$. Skizzieren Sie diese Lösungen.

Wie verhalten sich die Lösungen für $t \to \infty$?

Bearbeitungstermine: 28. Oktober 2024 - 01. November 2024