Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

WS 2024/25

Differentialgleichungen 1
für Studierende der Ingenieurswissenschaften

Hörsaalübung 6:

Stabilität, Steigungsfelder, die Laplace-Transformation

Claus R. Goetz

Universität Hamburg ● Fachbereich Mathematik

1. Stabilität für lineare Systeme und Steigungsfelder

Ruhelagen definieren konstante Lösungen.

Autonomes System: $u' = F(u)$, $F : D_F \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ u : I \to D_F.$

Ruhelage (auch **stationärer Punkt** genannt): u^* mit $F(u^*) = 0.$
Dann ist durch

$$u(t) := u^* \qquad \text{für alle} \quad t \in I$$

eine konstante Lösung definiert. $\hookrightarrow (u^*)' = 0 = F(u^*).$

Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten,
$F(u) = Au + b,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ b \in \mathbb{R}^n$, sind die Ruhelagen die Lösungen von
$Au^* = -b.$

Insbesondere für $b = 0$:

- $u^* = 0$ ist eine Ruhelage;
- Ist A regulär, so ist $u^* = 0$ die einzige Ruhelage.

Wir untersuchen heute die **Stabilität** von Ruhelagen.

Frage: Sei u^* eine Ruhelage von $u' = F(u)$ und y_0 ein Punkt in der Nähe von u^*. Wie verhält sich die Lösung des Anfangswertproblems $u' = F(u),\ u(0) = y_0$?

Definition. Sei u^* eine Ruhelage von $u' = F(u)$. Dann heißt u^*

- **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt

$$|y_0 - u^*| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |u(t) - u^*| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \geq 0;$$

- **asymptotisch stabil**, wenn es ein $\delta_0 > 0$ gibt, so dass gilt

$$|y_0 - u^*| < \delta_0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} |u(t) - u^*| = 0;$$

- **instabil**, wenn u^* nicht stabil ist.

Dabei sei u jeweils die Lösung des Anfangswertproblems $u' = F(u),\ u(0) = y_0$.

Beispiel: $F(u) = Au$ mit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ A ist regulär und $u^* = (0,0,0)^\top = 0 \in \mathbb{R}^3$ ist die einzige Ruhelage.

Fundamentalsystem:

$$\left\{ w_1(t) = \mathrm{e}^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\xrightarrow{t \to \infty} 0 \qquad \xrightarrow{t \to \infty} 0 \qquad \xrightarrow{t \to \infty} 0$

Für alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{t\to\infty} \left(c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t) + c_3 w_3(t) \right) = 0$

$\Rightarrow$ u^* ist asymptotisch stabil. $u(0) = y_0 \to$ Bestimme c_1, c_2, c_3

Frage: Müssen wir erst die ganze Lösung ausrechnen um das zu sehen?

Hier gilt sogar: $\lim_{t \to \infty} u(t) = 0$, unabh. von Anfangswert.

Für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten wird die Stabilität **durch die Eigenwerte charakterisiert.**

Für homogene Probleme:

Basislösung: $e^{\lambda t} v$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und u^* eine Ruhelage von $u' = Au$. Dann gilt

- Hat **mindestens ein** Eigenwert von A einen **positiven Realteil**, so ist u^* **instabil**.
- Haben **alle** Eigenwerte von A einen **negativen Realteil**, so ist u^* **asymptotisch stabil**.
- Gilt $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ_k von A und $\alpha(\lambda_k) = \gamma(\lambda_k)$ für alle λ_k mit $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$, so ist u^* **stabil** (aber nicht asymptotisch stabil).

  Insbes. erfüllt, falls $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ und λ_k einfacher EW ist.

Für inhomogene Probleme:

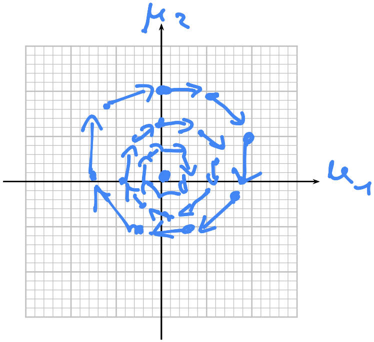
Ist u^* eine Ruhelage von $u' = Au + b$, so ist die Stabilität von u^* äquivalent zur Stabilität der Nulllösung des homogenen Problems.

Für (2×2) - Systeme können wir das Verhalten durch **Steigungsfelder** visualisieren.

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie erhalten das **Steigungsfeld** (oder auch **Richtungsfeld**) von F, indem wir jedem Punkt $(u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $F(u_1, u_2)$ anheften.

Beispiel:

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$



Beispiel:

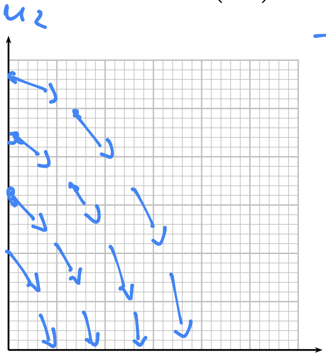
mit $u_1' = u_2$

$u_2' = -g$

$\to u_1'' = -g$

freier Fall

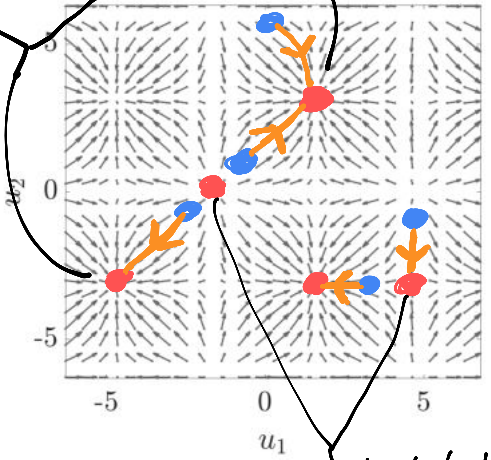
$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -g \end{pmatrix}$$



Trajektorien sind Kurven in der (u_1, u_2)-Ebene, die tangential an das Steigungsfeld sind.

Beispiel:

asymptotisch stabil



instabil

nichtlinear

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}$$

$u' = F(u)$

Plot (in MATLAB):

```
f = @(u,v) cos(u);
g = @(u,v) sin(v);

N = 24;
x = linspace(-2*pi, 2*pi,N);
[u, v] =  meshgrid(x,x);
quiver(u,v,f(u,v),g(u,v));
```

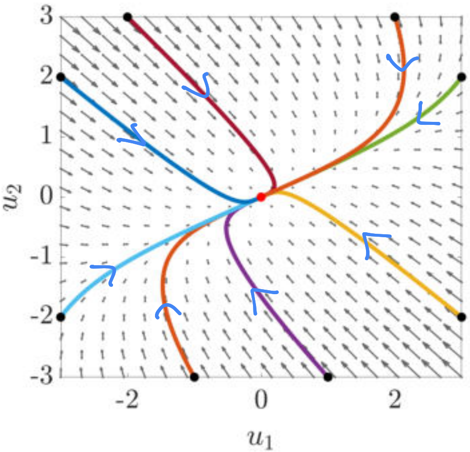
Beispiel: $$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -4, \ \lambda_2 = -1$: Beide EW $\neq 0$

$\Rightarrow$ A regulär

$\Rightarrow$ $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einzige Ruhelage.

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow u^*$ ist asymptotisch stabil.



Anfangswert $u(0)$

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -2u_1 + 2u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -4, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$u(t) \longrightarrow u^*$, unabh. von Anfangswert.

Fundamentalsystem : $\left\{ e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$

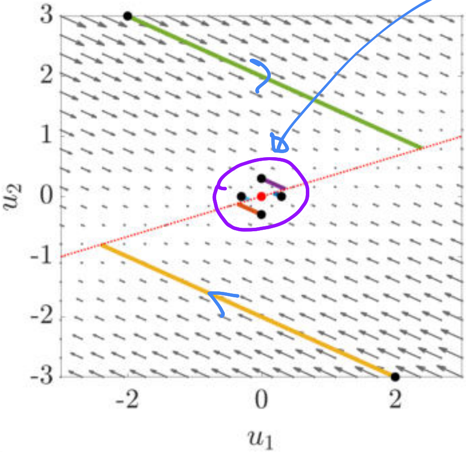
Beispiel: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \Rightarrow A$ nicht regulär, $\ker(A) = \operatorname{span}\{v^{[2]}\}$

$u^*_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ist Ruhelage für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\begin{array}{l} \text{kein EW hat positiven Realteil, alle EW} \\ \text{mit } \operatorname{Re}(\lambda) = 0 \text{ sind einfach} \\ \Rightarrow \text{Alle } u^*_\alpha \text{ sind stabil, (aber nicht asymp. stabil).} \end{array}}$



Trajektorien, die nahe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ starten, bleiben nahe $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber konvergieren nicht notwendig gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -2u_1 + 6u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -5, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

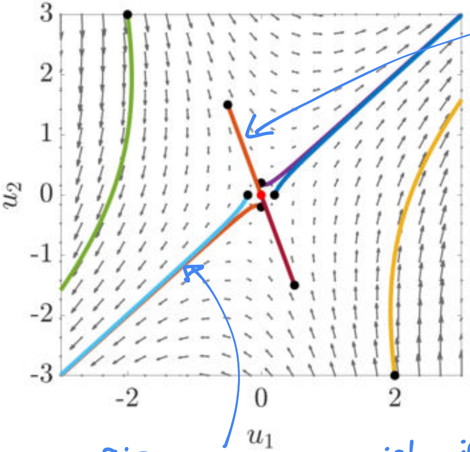
Fundamentalsystem : $\left\{ e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2$. $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einzige Ruhelage.

Ein EW hat $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$

$\Rightarrow$ u^* ist instabil.



Es gibt eine "stabile Richtung"

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ 3u_1 - u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Richtung ist instabil. Insgesamt: instabil

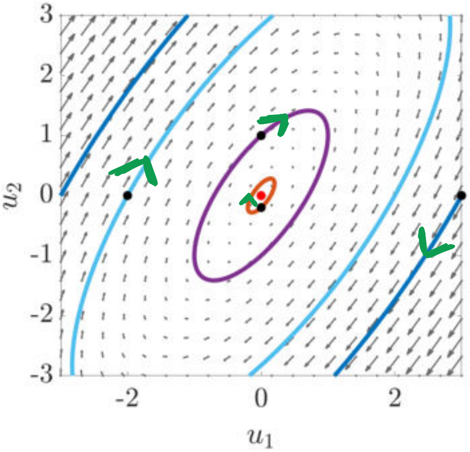
Fundamentalsystem : $\left\{ e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \; e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Beispiel: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$ für alle k, alle λ_k einfach

$\Rightarrow u^*$ stabil (aber nicht asymp. stabil.



$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -u_1 + u_2 \\ -2u_1 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\mathrm{i}, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \mathrm{i}, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$Re(\lambda_u) = 0$

$e^{0 \cdot t}$

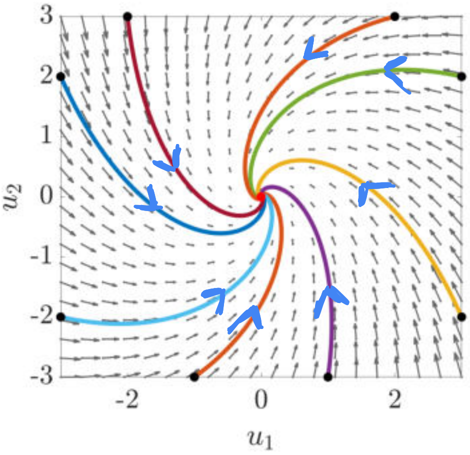
$$\left\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}, \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}\, i \quad , \qquad u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Re}(\lambda_k) = -2 < 0$ für alle k

$\Rightarrow$ u^* asymptotisch stabil.



$$F(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} -2u_1 - u_2 \\ 2u_1 - 2u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 - \sqrt{2}\mathrm{i}, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 + \sqrt{2}\mathrm{i}, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

macht die Spiralform.

$$\left\{ \mathrm{e}^{(-2-\sqrt{2}\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}\mathrm{i} \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{(-2+\sqrt{2}\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \right\}$$

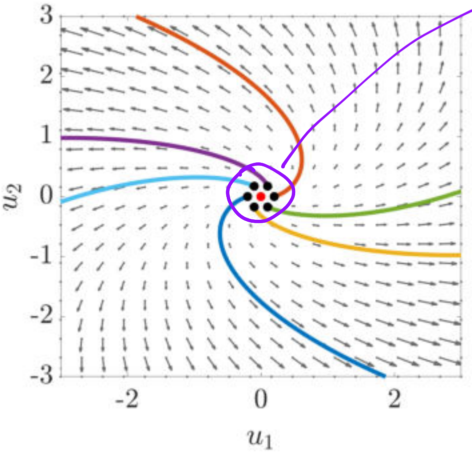
$\to 0$ für $t \to \infty$

Beispiel: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$, $\quad u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gibt (mindestens) einen EW mit

$\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad u^*$ ist instabil.



$\lim\limits_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$ für alle AW $y_0 \neq \binom{0}{0}$.

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1/3 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 - \mathrm{i}/\sqrt{3}, \quad v^{[1]} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}/\sqrt{3}, \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}/\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}/\sqrt{3})t} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(t/\sqrt{3}) \\ -\sin(t/\sqrt{3}) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(t/\sqrt{3}) \\ -\cos(t/\sqrt{3}) \end{pmatrix} \right\}$$

2. Die Laplace-Transformation

Wir verwenden die **Laplace-Transformation** um Differentialgleichungen auf algebraische Gleichungen zurück zu führen.

Bzw. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine auf allen kompakten Intervallen integrierbare Funktion (z.B. eine steige Funktion). Die **Laplace-Transformierte** von f ist definiert als

$$\overset{\mathcal{L}}{\cancel{\mathcal{L}}} f(s) := F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Wir schreiben für $\overset{\mathcal{L}}{\cancel{\mathcal{L}}} f = F$ auch $\quad f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$.

Falls $|f(t)| \leq C\mathrm{e}^{\gamma_0 t}$ für alle $t \geq 0$ mit festem $C > 0$ und $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, ist $F(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \gamma_0$ definiert.

$|f|$ darf nicht zu schnell wachsen.

Die Laplace-Transformation übersetzt Differentiation in Multiplikation.

$u' = au, \quad u(0) = y_0$

Es gilt die Korrespondenz $\Rightarrow \mathcal{L}(u') = \mathcal{L}(au) \Rightarrow sU(s) - y_0 = aU(s)$

$$u'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, sU(s) - u(0). \qquad \Rightarrow U(s) = \frac{y_0}{s-a}.$$

Abeitung wird übersetzt in Multiplikation.

Unser Ziel ist das zu benutzen um ein lineares Anfangswertproblem zu lösen. Wir gehen dabei wie folgt vor:

1. Wende die Laplace-Transformation auf das AWP an, erhalte eine algebraische Gleichung, $\quad u \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, U$;
2. Finde die Lösung U der algebraischen Gleichung (im Bildraum);
3. Transformiere die Lösung zurück in den Originalraum, $\quad U \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, u$.

↳ Das ist meistens der schwierige Teil.

Es lohnt sich **einige Korrespondenzen** zu kennen.

Laplace-Transformation ist dann hilfreich, wenn man alle Korrespondenzen aus einer Tabelle ablesen kann.

z.B. Wenn man oft die selbe DGL mit wechselnder Inhomogenität lösen möchte.

$f(t),\ t \geq 0$	F	γ_0
1	$\frac{1}{s}$	0
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$\mathrm{e}^{at},\ a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	$\mathrm{Re}(a)$
$\sin(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0

Es gelten die folgenden **Rechenregeln für die Laplace-Transformation**.

Für $f \circ\!\!-\!\!\bullet F,\ f \circ\!\!-\!\!\bullet G$:

- $(\alpha f + \beta g) \circ\!\!-\!\!\bullet (\alpha F + \beta G)$
- $\alpha > 0: \quad f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
- $a > 0: \quad h_a(t) f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-as} F(s)$, $h_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$
- $a \in \mathbb{C}: \quad e^{at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$ $= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at} f(t)\right) dt$
- $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$
- $(-t)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F^{(n)}(s)$

siehe BSP 2.

Brauchen wir für DGL'n.

Beispiel: $u'' + 9u = \cos(2t), \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = \frac{12}{5}.$ $\qquad u \circ\!\!-\!\!\bullet\, U$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(u'' + 9u) = \mathcal{L}(u'') + 9\,\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}\cos(2t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{s^2 U(s) - s\,u(0) - u'(0)}_{= \mathcal{L}(u'')} + 9\,U(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow (s^2+9)\,U(s) = \frac{s}{s^2+4} + s + \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

$? \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$

$\cos(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+9}$

$\frac{1}{3}\sin(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2+9}$

Für die Rücktransformation macht uns

$$\frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$$ Arbeit.

Ansatz (Partialbruchzerlegung):

$$\frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow \quad s = (As+B)(s^2+9) + (Cs+D)(s^2+4)$$

Koeff. Vergleich:
$$= \underbrace{(A+C)}_{=0}s^3 + \underbrace{(B+D)}_{=0}s^2 + \underbrace{(9A+4C)}_{=1}s + \underbrace{(9B+4D)}_{=0}$$

$$A = -C \Rightarrow -9C + 4C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$B \doteq -D \Rightarrow -9D + 4D = 0 \Rightarrow B = D = 0$$

Damit:

$$U(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)} - \frac{s}{s^2+9} + \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{5} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{s^2+9}$$

Rücktransformation:

$$u(t) = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t) + \frac{4}{5} \sin(3t)$$

Beispiel: $u'' + 2u' + u = 9e^{2t}, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$

$$\mathcal{L}(u'' + 2u' + u) = \mathcal{L}(u'') + 2\mathcal{L}(u') + \mathcal{L}(u) = 9\,\mathcal{L}(e^{2t})$$

$$\Rightarrow s^2 U(s) - \cancel{s\,u(0)} - \cancel{u'(0)}^{\,1} + 2\left(s\,U(s) - \cancel{u(0)}\right) + U(s) = \frac{9}{s-2}.$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)\,U(s) = \frac{9}{s-2} + 1 = \frac{9}{s-2} + \frac{s-2}{s-2} = \frac{7+s}{s-2}$$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{7+s}{(s+1)^2(s-2)}.$$

Partialbruchzerlegung für $\frac{s+7}{(s+1)^2(s-2)}$:

Ansatz: $\frac{s+7}{(s+1)^2(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s-2)}$

$$\Rightarrow s+7 = A(s+1)(s-2) + B(s-2) + C(s+1)^2$$

$s=-1$: $6 = -3B \Rightarrow B = -2$

$s=2$: $9 = 9C \Rightarrow C = 1$

$s=0$: $7 = -2A - 2B + C = -2A + 4 + 1$

$$\Rightarrow 2 = -2A \Rightarrow A = -1$$

$$U(s) = -\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{e^{-t}} + \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{e^{2t}} - 2\cdot \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2}}_{?}$$

Es gilt: $t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2} =: F(s)$. Damit: $\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1}{(s-(-1))^2}$

$= F(s-a)$ mit $a=-1$.

Es gilt $F(s-a) \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{at} f(t)$

$= e^{-t}\cdot t$

$$\Rightarrow u(t) = -e^{-t} - 2te^{-t} + e^{2t} = -(1+2t)e^{-t} + e^{2t}.$$